МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВО «СамГТУ»)

УТВЕРЖДАЮ:
Первый проректор-проректор по учебной работе
_____ / Д.Е. Овчинников
"_____" _____ 20___ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.О.03.11 «Аналитические методы моделирования энергетических систем»

Код и направление подготовки (специальность)	13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника
Направленность (профиль)	Промышленная теплоэнергетика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Заочная
Год начала подготовки	2024
Институт / факультет	Теплоэнергетический факультет
Выпускающая кафедра	кафедра "Промышленная теплоэнергетика"
Кафедра-разработчик	кафедра "Теоретические основы теплотехники и гидромеханика"
Объем дисциплины, ч. / з.е.	72 / 2
Форма контроля (промежуточная аттестация)	Зачет

Самара 2024

Б1.О.03.11 «Аналитические методы моделирования энергетических систем»

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) **13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника**, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от № 143 от 28.02.2018 и соответствующего учебного плана.

Разработчик РПД:

Доцент, кандидат технических наук	Р.Ж Габдушев
(должность, степень, ученое звание)	(ФИО)

Заведующий кафедрой	В.А. Кудинов, доктор физико-математических наук, профессор
	(ФИО, степень, ученое звание)

СОГЛАСОВАНО:

Председатель методического совета факультета / института (или учебно-методической комиссии)	Н.В Маслобойникова, кандидат филологических наук, доцент
	(ФИО, степень, ученое звание)
Руководитель образовательной программы	А.С. Горшенин, кандидат технических наук, доцент
	(ФИО, степень, ученое звание)
Заведующий выпускающей кафедрой	А.В. Еремин, доктор технических наук, доцент
	(ФИО, степень, ученое звание)

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы 4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы 4
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся 5
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам), с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий 5
4.1 Содержание лекционных занятий 6
4.2 Содержание лабораторных занятий 6
4.3 Содержание практических занятий 7
4.4. Содержание самостоятельной работы 7
5. Перечень учебной литературы и учебно-методического обеспечения по дисциплине (модулю) 11
6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения 12
7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональных баз данных, информационно-справочных систем 12
8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю) 12
9. Методические материалы 13
10. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) 14

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Наименование категории (группы) компетенций	Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения (знать, уметь, владеть, соотнесенные с индикаторами достижения компетенции)
Общепрофессиональные компетенции			
Фундаментальная подготовка	ОПК-2 Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментальног о исследования при решении профессиональных задач	ОПК-2.1 Знать: физико-математический аппарат, основные законы естествознания, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования	Знать физико-математический аппарат, основные законы естествознания, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования
		ОПК-2.4 Уметь: применять физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Уметь применять физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности
		ОПК-2.7 Владеть: навыками применения физико-математического аппарата, методов анализа и моделирования, основных законов естествознания, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	Владеть навыками применения физико-математического аппарата, методов анализа и моделирования, основных законов естествознания, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы: **обязательная часть**

Код компетенции	Предшествующие дисциплины	Параллельно осваиваемые дисциплины	Последующие дисциплины

ОПК-2	Гидрогазодинамика; Математика; Материаловедение и технология конструкционных материалов; Прикладная механика; Уравнения математической физики; Физика; Химия		Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы

3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Вид учебной работы	Всего часов / часов в электронной форме	7 семестр часов / часов в электронной форме
Аудиторная контактная работа (всего), в том числе:	4	4
Лекции	2	2
Практические занятия	2	2
Внеаудиторная контактная работа, КСР	2	2
Самостоятельная работа (всего), в том числе:	62	62
подготовка к зачету	20	20
подготовка к практическим занятиям	42	42
Контроль	4	4
Итого: час	72	72
Итого: з.е.	2	2

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам), с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ раздела	Наименование раздела дисциплины	Виды учебной нагрузки и их трудоемкость, часы				
		ЛЗ	ЛР	ПЗ	СРС	Всего часов
1	Метод конечных разностей для задач стационарной теплопроводности	1	0	1	25	27
2	Методы решения задач теплопроводности	0	0	0	5	5
3	Метод конечных разностей для задач нестационарной теплопроводности	1	0	1	27	29
4	Приближенные аналитические методы решения задач теплопроводности	0	0	0	5	5
	КСР	0	0	0	0	2

	Контроль	0	0	0	0	4
	Итого	2	0	2	62	72

4.1 Содержание лекционных занятий

№ занятия	**Наименование раздела**	**Тема лекции**	**Содержание лекции** (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов)	**Количество часов / часов в электронной форме**
7 семестр				
1	Метод конечных разностей для задач стационарной теплопроводности	Тема 2.1. Численный метод - метод конечных разностей (МКР). Тема 2.2. Численное решение двумерных задач стационарной теплопроводности методом итераций. Тема 2.3. Методы решения систем алгебраических уравнений.	Основная идея. Аппроксимация функций. Численное интегрирование и дифференцирование функций. Устойчивость. Сходимость. Математическая постановка двумерной задачи стационарной теплопроводности. Применение МКР для двумерной задачи стационарной теплопроводности. Метод итераций. Его основная идея. Метод последовательного исключения Гаусса. Итерационные методы. Решение систем линейных алгебраических уравнений.	1
2	Метод конечных разностей для задач нестационарной теплопроводности	Тема 3.1. Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по явной схеме. Тема 3.2. Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по неявной схеме.	Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности. Применение МКР для задачи нестационарной теплопроводности по явной схеме. Особенности применения МКР по явной схеме. Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности. Применение МКР для задачи нестационарной теплопроводности по неявной схеме. Особенности применения МКР по неявной схеме. Метод прогонки. Его основная идея.	1
			Итого за семестр:	**2**
			Итого:	**2**

4.2 Содержание лабораторных занятий

Учебные занятия не реализуются.

4.3 Содержание практических занятий

№ занятия	Наименование раздела	Тема практического занятия	Содержание практического занятия (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов)	Количество часов / часов в электронной форме
7 семестр				
1	Метод конечных разностей для задач стационарной теплопроводности	Тема 2.1. Численный метод - метод конечных разностей (МКР). Тема 2.2. Численное решение двумерных задач стационарной теплопроводности методом итераций. Тема 2.3. Методы решения систем алгебраических уравнений.	Основная идея. Аппроксимация функций. Численное интегрирование и дифференцирование функций. Устойчивость. Сходимость. Математическая постановка двумерной задачи стационарной теплопроводности. Применение МКР для двумерной задачи стационарной теплопроводности. Метод итераций. Его основная идея. Метод последовательного исключения Гаусса. Итерационные методы. Решение систем линейных алгебраических уравнений.	1
2	Метод конечных разностей для задач нестационарной теплопроводности	Тема 3.1. Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по явной схеме. Тема 3.2. Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по неявной схеме.	Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности. Применение МКР для задачи нестационарной теплопроводности по явной схеме. Особенности применения МКР по явной схеме. Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности. Применение МКР для задачи нестационарной теплопроводности по неявной схеме. Особенности применения МКР по неявной схеме. Метод прогонки. Его основная идея.	1
			Итого за семестр:	**2**
			Итого:	**2**

4.4. Содержание самостоятельной работы

Наименование раздела	Вид самостоятельной работы	Содержание самостоятельной работы (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов)	Количество часов
7 семестр			

Метод конечных разностей для задач стационарной теплопроводности	подготовка к зачету	Тема 2.1. Численный метод - метод конечных разностей (МКР). Основная идея. Аппроксимация функций. Численное интегрирование и дифференцирование функций. Устойчивость. Сходимость. Тема 2.2. Численное решение двумерных задач стационарной теплопроводности методом итераций. Математическая постановка двумерной задачи стационарной теплопроводности. Применение МКР для двумерной задачи стационарной теплопроводности. Метод итераций. Его основная идея. Тема 2.3. Методы решения систем алгебраических уравнений. Метод последовательного исключения Гаусса. Итерационные методы. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений.	5
Метод конечных разностей для задач стационарной теплопроводности	подготовка к практическим занятиям	Тема 2.1. Численный метод - метод конечных разностей (МКР). Основная идея. Аппроксимация функций. Численное интегрирование и дифференцирование функций. Устойчивость. Сходимость. Тема 2.2. Численное решение двумерных задач стационарной теплопроводности методом итераций. Математическая постановка двумерной задачи стационарной теплопроводности. Применение МКР для двумерной задачи стационарной теплопроводности. Метод итераций. Его основная идея. Тема 2.3. Методы решения систем алгебраических уравнений. Метод последовательного исключения Гаусса. Итерационные методы. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений.	20

Методы решения задач теплопроводности	подготовка к зачету	Введение Способы передачи теплоты; основные понятия процесса теплопроводности: температурное поле, изотермическая поверхность, градиент температуры, вектор плотности теплового потока. Закон Фурье. Дифференциальное уравнение температурного поля. Условия однозначности для процесса теплопроводности. Математическая постановка задачи теплопроводности для неограниченной пластины при ГУ-1,2,3 рода. Тема 1.1. Аналитические и численные методы решения задач теплопроводности. Понятие: аналитический и численный метод. Точные и приближенные аналитические методы решения задач теплопроводности. Численные методы решения задач теплопроводности. Преимущества и недостатки аналитических и численных методов. Тема 1.2. Точный аналитический метод – метод разделения переменных (метод Фурье). Основная идея. Уравнение Покеля. Задача Штурма-Лиувилля. Собственные числа и функции. Тема 1.3. Применение метода Фурье. Определение температурного поля в плоской стенке при граничных условиях 1 рода. Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности в размерном и безразмерном виде.	5

Метод конечных разностей для задач нестационарной теплопроводности	подготовка к зачету	Тема 3.1. Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по явной схеме. Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности. Применение МКР для задачи нестационарной теплопроводности по явной схеме. Особенности применения МКР по явной схеме. Тема 3.2. Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по неявной схеме. Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности. Применение МКР для задачи нестационарной теплопроводности по неявной схеме. Особенности применения МКР по неявной схеме. Метод прогонки. Применение метода прогонки на ЭВМ. Его основная идея. Тема 3.3. Численные методы решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Схемы Эйлера. Схемы Рунге-Кутта. Линейные многошаговые методы. Выбор шага интегрирования и оценка погрешности численного решения. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений.	5

Метод конечных разностей для задач нестационарной теплопроводности	подготовка к практическим занятиям	Тема 3.1. Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по явной схеме. Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности. Применение МКР для задачи нестационарной теплопроводности по явной схеме. Особенности применения МКР по явной схеме. Тема 3.2. Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по неявной схеме. Математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности. Применение МКР для задачи нестационарной теплопроводности по неявной схеме. Особенности применения МКР по неявной схеме. Метод прогонки. Применение метода прогонки на ЭВМ. Его основная идея. Тема 3.3. Численные методы решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Схемы Эйлера. Схемы Рунге-Кутта. Линейные многошаговые методы. Выбор шага интегрирования и оценка погрешности численного решения. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений.	22
Приближенные аналитические методы решения задач теплопроводности	подготовка к зачету	Тема 4.1. Приближенные аналитические методы решения задач теплопроводности. Метод координатных функций в точных аналитических решениях. Невязки дифференциальных уравнений. Совместное использование методов Фурье и Бубнова-Галеркина. Тема 4.2. Применение приближенных аналитических методов. Пример решения нестационарной задачи теплопроводности для неограниченной пластины при симметричных граничных условиях 1 рода (алгебраические координатные функции). Математическая постановка нестационарной задачи теплопроводности в размерном и безразмерном виде. Безразмерные температура, координата, время.	5
		Итого за семестр:	**62**
		Итого:	**62**

5. Перечень учебной литературы и учебно-методического обеспечения по дисциплине (модулю)

№ п/п	Библиографическое описание	Ресурс НТБ СамГТУ (ЭБС СамГТУ, IPRbooks и т.д.)
Основная литература		
1	Аналитические решения задач теплопроводности и термоупругости с переменными физическими свойствами среды : учеб. пособие / И. В. Кудинов [и др.] ; ред. В. А. Кудинов; Самар.гос.техн.ун-т.- Самара, 2016.- 167 с.	Книжный фонд
2	Теоретические основы теплотехники. . Ч. II. // Кудинов, Игорь Васильевич Математическое моделирование процессов теплопроводности в многослойных ограждающих конструкциях : учеб. пособие [Текст] / Самар. гос. архитектур.-строит. ун-т (СГАСУ), Каф. общ. и приклад. физики и химии.- Самара, СГАСУ, 2013.- 421 с.	Книжный фонд

Доступ обучающихся к ЭР НТБ СамГТУ (elib.samgtu.ru) осуществляется посредством электронной информационной образовательной среды университета и сайта НТБ СамГТУ по логину и паролю.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения

При проведении лекционных занятий используется мультимедийное оборудование.

Организовано взаимодействие обучающегося и преподавателя с использованием электронной ин-формационной образовательной среды университета.

№ п/п	Наименование	Производитель	Способ распространения
1	Windows	Microsoft (Зарубежный)	Лицензионное

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональных баз данных, информационно-справочных систем

№ п/п	Наименование	Краткое описание	Режим доступа
1	Электронно-библиотечная система IPRbooks	http://www.iprbookshop.ru/	Российские базы данных ограниченного доступа
2	Электронная библиотека изданий СамГТУ	http://irbis.samgtu.local/cgi-bin/irbis64r_01/cgiirbis_64.exe	Российские базы данных ограниченного доступа

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Лекционные занятия

- мультимедийная лекционная аудитория, в которой установлено и задействовано в учебном процессе следующее оборудование: мультимедийные проекторы, принтеры, комплект интерактивного оборудования (интерактивная доска, документ-камера, аудио-система), ноутбук, беспроводной пульт для проведения презентаций.

- Комплект электронных презентаций/слайдов.

Практические занятия

- мультимедийная аудитория (ауд.48/6 корпуса СамГТУ), в которой установлено и задействовано в учебном процессе следующее оборудование: мультимедийный проектор, принтер, комплект интерактивного оборудования (интерактивная доска, документ-камера, аудио-система), ноутбук, беспроводной пульт для проведения презентаций, оснащенная необходимыми пакетами ПО (текстовыми и графическими редакторами).

Самостоятельная работа

- рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет (ауд.23/6 корпуса СамГТУ),
- рабочие места студентов, оснащенные компьютерами с доступом в Интернет, предназначенные для работы в электронной образовательной среде (ауд.29/6 корпуса СамГТУ),
- ресурсы научно-технической библиотеки СамГТУ;
- ресурсы информационно-вычислительных центров СамГТУ (ауд.48/6 корпуса СамГТУ).

9. Методические материалы

Методические рекомендации при работе на лекции

До лекции студент должен просмотреть учебно-методическую и научную литературу по теме лекции с тем, чтобы иметь представление о проблемах, которые будут разбираться в лекции.

Перед началом лекции обучающимся сообщается тема лекции, план, вопросы, подлежащие рассмотрению, доводятся основные литературные источники. Весь учебный материал, сообщаемый преподавателем, должен не просто прослушиваться. Он должен быть активно воспринят, т.е. услышан, осмыслен, понят, зафиксирован на бумаге и закреплен в памяти. Приступая к слушанию нового учебного материала, полезно мысленно установить его связь с ранее изученным. Следя за техникой чтения лекции (акцент на существенном, повышение тона, изменение ритма, пауза и т.п.), необходимо вслед за преподавателем уметь выделять основные категории, законы и определять их содержание, проблемы, предполагать их возможные решения, доказательства и выводы. Осуществляя такую работу, можно значительно облегчить себе понимание учебного материала, его конспектирование и дальнейшее изучение.

Конспектирование лекции позволяет обработать, систематизировать и лучше сохранить полученную информацию с тем, чтобы в будущем можно было восстановить в памяти основные, содержательные моменты. Типичная ошибка, совершаемая обучающимся, дословное конспектирование речи преподавателя. Как правило, при записи «слово в слово» не остается времени на обдумывание, анализ и синтез информации. Отбирая нужную информацию, главные мысли, проблемы, решения и выводы, необходимо сокращать текст, строить его таким образом, чтобы потом можно было легко в нем разобраться. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых можно будет делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. С окончанием лекции работа над конспектом не может считаться завершенной. Нужно еще восстановить отдельные места, проверить, все ли понятно, уточнить что-то на консультации и т.п. с тем, чтобы конспект мог быть использован в процессе подготовки к практическим занятиям, зачету, экзамену. Конспект лекции – незаменимый учебный документ, необходимый для самостоятельной работы.

Методические рекомендации при подготовке и работе на практическом занятии

Практические занятия по дисциплине проводятся в целях выработки практических умений и приобретения навыков в решении профессиональных задач.

Рекомендуется следующая схема подготовки к практическому занятию:

1. ознакомление с планом практического занятия, который отражает содержание предложенной темы;
2. проработка конспекта лекции;
3. чтение рекомендованной литературы;

4. подготовка ответов на вопросы плана практического занятия;
5. выполнение тестовых заданий, задач и др.

Подготовка обучающегося к практическому занятию производится по вопросам, разработанным для каждой темы практических занятий и (или) лекций. В процессе подготовки к практическим занятиям, необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной литературы.

Работа студентов во время практического занятия осуществляется на основе заданий, которые выдаются обучающимся в начале или во время занятия. На практических занятиях приветствуется активное участие в обсуждении конкретных ситуаций, способность на основе полученных знаний находить наиболее эффективные решения поставленных проблем, уметь находить полезный дополнительный материал по тематике занятий. Обучающимся необходимо обращать внимание на основные понятия, алгоритмы, определять практическую значимость рассматриваемых вопросов. На практических занятиях обучающиеся должны уметь выполнить расчет по заданным параметрам или выработать определенные решения по обозначенной проблеме. Задания могут быть групповые и индивидуальные. В зависимости от сложности предлагаемых заданий, целей занятия, общей подготовки обучающихся преподаватель может подсказать обучающимся алгоритм решения или первое действие, или указать общее направление рассуждений. Полученные результаты обсуждаются с позиций их адекватности или эффективности в рассмотренной ситуации.

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы

Организация самостоятельной работы обучающихся ориентируется на активные методы овладения знаниями, развитие творческих способностей, переход от поточного к индивидуализированному обучению с учетом потребностей и возможностей обучающегося.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной литературой, материалами периодических изданий и Интернета является наиболее эффективным методом получения дополнительных знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала. Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса.

Самостоятельная работа реализуется:

- непосредственно в процессе аудиторных занятий;
- на лекциях, практических занятиях;
- в контакте с преподавателем вне рамок расписания;
- на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.;
- в библиотеке, дома, на кафедре при выполнении обучающимся учебных и практических задач.

Эффективным средством осуществления обучающимся самостоятельной работы является электронная информационно-образовательная среда университета, которая обеспечивает доступ к учебным планам, рабочим программам дисциплин (модулей), практик, к изданиям электронных библиотечных систем.

10. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств представлен в приложении № 1.

Приложение 1 к рабочей программе дисциплины
Б1.О.03.11 «Аналитические методы моделирования энергетических систем»

Фонд оценочных средств
по дисциплине
Б1.О.03.11 «Аналитические методы моделирования энергетических систем»

Код и направление подготовки (специальность)	13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника
Направленность (профиль)	Промышленная теплоэнергетика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Заочная
Год начала подготовки	2024
Институт / факультет	Теплоэнергетический факультет
Выпускающая кафедра	кафедра "Промышленная теплоэнергетика"
Кафедра-разработчик	кафедра "Теоретические основы теплотехники и гидромеханика"
Объем дисциплины, ч. / з.е.	72 / 2
Форма контроля (промежуточная аттестация)	Зачет

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Наименование категории (группы) компетенций	Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения (знать, уметь, владеть, соотнесенные с индикаторами достижения компетенции)
Общепрофессиональные компетенции			
Фундаментальная подготовка	ОПК-2 Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментальног о исследования при решении профессиональных задач	ОПК-2.1 Знать: физико-математический аппарат, основные законы естествознания, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования	Знать физико-математический аппарат, основные законы естествознания, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования
		ОПК-2.4 Уметь: применять физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Уметь применять физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности
		ОПК-2.7 Владеть: навыками применения физико-математического аппарата, методов анализа и моделирования, основных законов естествознания, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	Владеть навыками применения физико-математического аппарата, методов анализа и моделирования, основных законов естествознания, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач

Матрица соответствия оценочных средств запланированным результатам обучения

Код и индикатор достижения компетенции	Разделы				
	Точные аналитические методы	Приближенные аналитические методы	Совместное применение точных и приближенных аналитических методов	Дифференциальные уравнения математической физики	Компьютерное моделирование энергетических систем
	Наименование оценочного средства	Наименование оценочного средства	Наименование оценочного средства	Наименование оценочного средства	Наименование оценочного средства
З5 ОПК-2.1. У5 ОПК-2.2. В5 ОПК-2.3	Отчеты по темам практических занятий. Вопросы к зачету.	Отчеты по темам практических занятий. Вопросы к зачету.	Отчеты по темам практических занятий. Вопросы к зачету.	Отчеты по темам практических занятий. Вопросы к зачету.	Отчеты по темам практических занятий. Вопросы к зачету.

2.Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие процесс формирования компетенций в ходе освоения образовательной программы

2.1. Формы текущего контроля успеваемости

Текущая аттестация студента по дисциплине производится лектором в устанавливаемые учебным управлением сроки 4 раза в одном семестре. По результатам выполнения самостоятельной работы и отчета по практическим занятиям. При проведении текущей аттестации в систему сопровождения обучения в рамках проведения контрольного занятия выставляется оценка по пятибалльной шкале.

Отчет по темам практических занятий.

Отчет по темам практических занятий предполагает проработку теоретического материала, полученного в ходе выполнения работы в виде устных ответов на контрольные вопросы.

1. Как реализуется метод разделения переменных с использованием дополнительных граничных условий для решения краевых задач
2. Как реализуются вариационные методы (Ритца, Треффтца) применительно к решению краевых задач.
3. Методы взвешенных невязок (Бубнова-Галеркина, Л.В. Канторовича) для решения краевых задач.
4. Применение интегральных методов теплового баланса для решения краевых задач (тригонометрические координатные функции).
5. Применение интегральных методов теплового баланса для решения краевых задач (алгебраические координатные функции).

Совместное использование интегральных преобразований и метода Галеркина.

2.2. Формы промежуточной аттестации

Перечень вопросов к зачету

6. Метод разделения переменных
7. Метод тепловых потенциалов.
8. Метод функций Грина
9. Интегральные преобразования Лапласса.
10. Синус- и косинус-преобразования Фурье.
11. Интегральные преобразования Ханкеля.
12. Двукратные интегральные преобразования Лапласа-Карсона
13. Метод Ритца.
14. Метод Треффтца
15. Метод Бубнова-Галеркина.
16. Метод Л.В. Канторовича.
17. Метод Коллокаций
18. Метод Био.
19. Метод Швеца.
20. Метод Постольника.
21. Метод Гудмена.
22. Метода разделения переменных с использованием дополнительных граничных условий для решения краевых задач
23. Вариационные методы (Ритца, Треффтца) для решения краевых задач.
24. Методы взвешенных невязок (Бубнова-Галеркина, Л.В. Канторовича) для решения краевых задач.
25. Интегральные методы теплового баланса для решения краевых задач (тригонометрические координатные функции).
26. Интегральные методы теплового баланса для решения краевых задач (алгебраические координатные функции).
27. Совместное использование точных и приближенных методов решения краевых задач.

Тесты по компетенциям

Дисциплина Б1.О.03.11 «Аналитические методы моделирования энергетических систем»
(шифр и наименование дисциплины)

№ задания	Содержание задания	Ключ к ответу	Наименование темы в РПД	Семестр
ОПК-3 Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач				
1.	**Метод конечных разностей принадлежит к ….** а) Аналитическим методам решения задач теплопроводности б) Точным аналитическим методам решения задач теплопроводности в) Численным методам решения задач теплопроводности г) Приближенным аналитическим методам решения задач теплопроводности	В	Классические аналитические методы	5
2.	**Температурное поле двухмерной области без внутренних источников теплоты описывается уравнением…** а) $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ б) $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$ в) $\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$ г) $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$	Г	Приближенные аналитические методы	5
3.	**Какие граничные условия считаются заданными в задаче теплопроводности, если указано, что на границе тела температура постоянна в течение всей задачи?** а) ГУ-1 рода б) ГУ-2 рода в) ГУ-3 рода г) Условия сопряжения (ГУ-4 рода)	А	Вариационные методы	5
4.	**Если задана температура окружающей среды и закон теплообмена между телом и средой, то в математической постановке задачи теплопроводности нужно использовать …** а) Граничное условие 1 рода б) Граничное условие 2 рода в) Граничное условие 3 рода г) Граничное условие 4 рода (условие сопряжения)	В	Ортогональные методы взвешенных невязок	5
5.	**Как выглядит условие адиабатной стенки в математической задаче теплопроводности безразмерного вида?** а) $\frac{\partial t}{\partial Fo} = 0$ б) $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$ в) $\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0$ г) $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$	В	Интегральные методы теплового баланса	5
6.	**Что обозначает запись $\theta(\eta, 0) = 1$, если принято, что $\theta = \frac{t - t_{ст}}{t_0 - t_{ст}}$?** а) Температура тела в начальный момент времени равна 1 ^oC б) Относительная температура тела в начальный момент времени равна 1^oC в) Относительная избыточная температура тела в начальный момент времени равна 1 ^oC г) Избыточная температура тела в начальный момент времени равна 1 ^oC	В	Использование точных и приближенных методов	5
7.	**Что обозначает запись $t(0, \tau) = 0$?** а) Температура на левой границе в любой момент времени равна 0 ^oC	А	Постановка краевых задач математической физики	5

	б) Относительная температура на левой границе равна 0 ^{o}C в) Относительная избыточная температура на левой границе равна нулю г) Избыточная температура на левой границе равна 0 ^{o}C			
8.	**Что обозначает запись $\vartheta(\delta,\tau)=0$, если принято, что $\vartheta=t-t_{ст}$?** а) Температура на правой границе в любой момент времени равна 0 ^{o}C б) Относительная температура на правой границе равна 0 ^{o}C в) Относительная избыточная температура на правой границе равна нулю г) Избыточная температура на правой границе в любой момент времени равна 0 ^{o}C	Г	Постановка краевых задач математической физики	5
9.	**Что обозначает запись $\frac{\partial\vartheta(0,\tau)}{\partial x}=0$, если принято, что $\vartheta=t-t_{ст}$?** а) Температура тела на левой границе в любой момент времени равна 0 ^{o}C б) Относительная температура тела на левой границе в любой момент времени равна 0 ^{o}C в) На левой границе тела задано граничное условие 2 рода г) Избыточная температура на левой границе в любой момент времени равна 0 ^{o}C	В	Постановка краевых задач математической физики	5
10	**Что обозначает запись $\frac{\partial\vartheta(\delta,\tau)}{\partial x}=0$, если принято, что $\vartheta=t-t_{ст}$?** а) Температура тела на правой границе в любой момент времени равна 0 ^{o}C б) Относительная температура тела на правой границе в любой момент времени равна 0 ^{o}C в) На правой границе тела задано граничное условие 2 рода г) Избыточная температура на правой границе в любой момент времени равна 0 ^{o}C	В	Постановка краевых задач математической физики	5

Методические указания
к практическим занятиям по дисциплине
«Применение электронно-вычислительных машин
в тепловых расчетах»

Практическое занятие — форма организации обучения, которая является связующим звеном между самостоятельным теоретическим освоением учебной дисциплины и применением ее положений на практике.

Практические занятия по дисциплине проводятся в целях выработки практических умений и приобретения навыков в решении управленческих задач, выполнении заданий, разработке и оформлении документов, практического овладения компьютерными технологиями. Главным их содержанием является практическая работа каждого обучаемого.

Выполнение отчета по практическому занятию – один из видов самостоятельной работы в рамках данной дисциплины. Подготовка производится по вопросам, разработанным по темам практических занятий. Задания на практическую работу можно получить на кафедре ТОТиГ (23 ауд./6 корп.) непосредственно у преподавателя или в системе СДО «Прометей». **Номер варианта определяется по сумме двух последних цифр номера зачетной книжки студента.**

Отчет выполняется в виде пояснительной записки, включающей в себя текст, соответствующие рисунки и графики в электронном виде. Титульный лист (см. Приложение 1) оформляется с указанием фамилии и инициалов студента, курса-факультета-номера группы, номера варианта, также указывается должность и фамилия преподавателя, принимающего работу. Далее указывается цель работы, постановка задачи, исходные данные своего варианта, рисунок, краткая теория с основными формулами. После этого выполняется ручной расчет температурного поля, который затем сравнивается с машинным расчетом на электронно-вычислительной машине (ЭВМ). Программой расчета можно воспользоваться на кафедре ТОТиГ (30 ауд./6 корп.), в аудитории Информационного центра теплоэнергетического факультета (48 ауд./6 корп.) или установить самостоятельно, скачав файл «Программа расчета по дисциплине «Применение ЭВМ в тепловых расчетах».

В конце записки необходимо дать графическое представление результатов расчета: построить графики, учитывая исходные данные, результаты ручного расчета и расчета на ЭВМ, сделать выводы по проделанной работе, а также ответить на контрольные вопросы.

Исходные данные по вариантам есть в данном материале «Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Применение ЭВМ в тепловых расчетах», который также размещен в СДО «Прометей». В Приложениях 2 и 3 приведены примеры выполнения отчета по практическим занятиям №1 и №2.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1
«Применение метода конечных разностей в двумерных задачах стационарной теплопроводности»

Цель работы - приобретение навыков расчета двумерных задач стационарной теплопроводности методом конечных разностей (методом сеток) и методом итераций.

На практике часто интересуются распределением температур в двухмерных областях, т.е. когда температура изменяется только по двум координатам (например, угол здания, угол промышленной печи, изгиб детали, заготовки и т.д.). Знание такого распределения температур может помочь определить температурные напряжения, тепловые потоки. Решение таких задач может быть проведено с использованием приближенных методов расчета теплопроводности, которые приводят к удовлетворительным для инженерной практики результатам. Приближенные методы решения применяются в случае, когда точные аналитические методы расчета затруднительны. Одним из приближенных методов и является численный метод – метод конечных разностей или метод сеток.

Изложение численного метода

Из численных методов решения задач теплопроводности распространение получил метод конечных разностей. Его основная идея – преобразовать дифференциальное уравнение теплопроводности в частных производных (в нашем случае это уравнение Лапласа) в алгебраические уравнения с заменой дифференциалов на конечные разности.

Алгоритм применения этого метода для приближенного решения двумерных краевых задач стационарной теплопроводности заключается в следующем:

1. В плоской области L, в которой разыскивается решение, строится сеточная область L', состоящая из одинаковых ячеек и приближающая заданную область (рис.1.). На пересечении взаимно перпендикулярных линий, составляющих сетку, образуются, так называемые, узлы сетки (i, j).

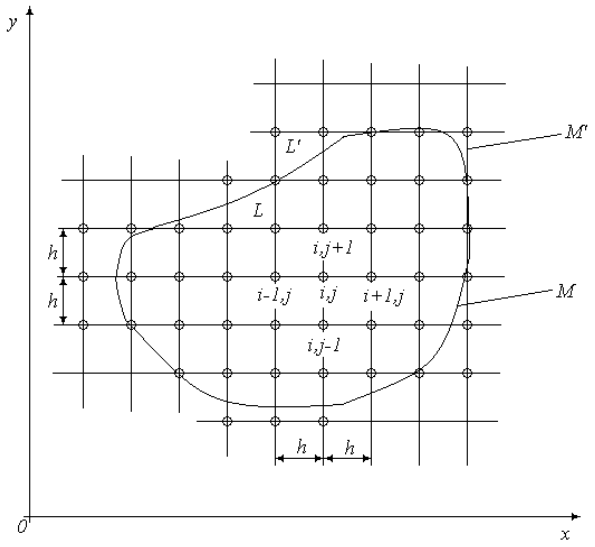


Рис.1. Сеточная область двумерной задачи стационарной теплопроводности

2. Заданное двумерное стационарное температурное поле, описываемое дифференциальным уравнением в частных производных – уравнением Лапласа,

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0, \qquad (1)$$

заменяется в каждом из внутренних узлов сетки конечно-разностным уравнением вида (5). Конечно-разностное уравнение представляет собой алгебраическое уравнение, связывающее значения температур в соседних узлах сетки.

Таким образом, дифференциальное уравнение (1) заменяется целой системой большого числа алгебраических уравнений.

3. На основании известных граничных условий на контуре M области L (например, при решении задач с граничными условиями 1-го рода) устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах области L', т.е. на контуре M'.

4. Значения во внутренних узлах области L' находятся путем решения указанной системы алгебраических уравнений. На этом и заканчивается, в принципе, использование метода сеток.

Для решения систем алгебраических уравнений имеется большое число различных методов. Далее мы будем использовать здесь *метод итераций*.

Остановимся теперь подробнее на описании метода конечных разностей. Для получения сеточной области L' на заданную область L наносится сетка, состоящая из 2-х систем взаимно перпендикулярных прямых, отстоящих друг от друга на расстоянии h. Это расстояние h называется шагом сетки, выбор которого определяется требованиями расчета температурного поля двумерной области.

Контур M' области L' выбирается так, чтобы он был как можно ближе к контуру M области L. В каждый из граничных узлов контура M' задаются граничные значения, равные известным значениям точки контура М, ближайшей к данному узлу.

Пусть температура вдоль оси x меняется так, как показано на рис.2.

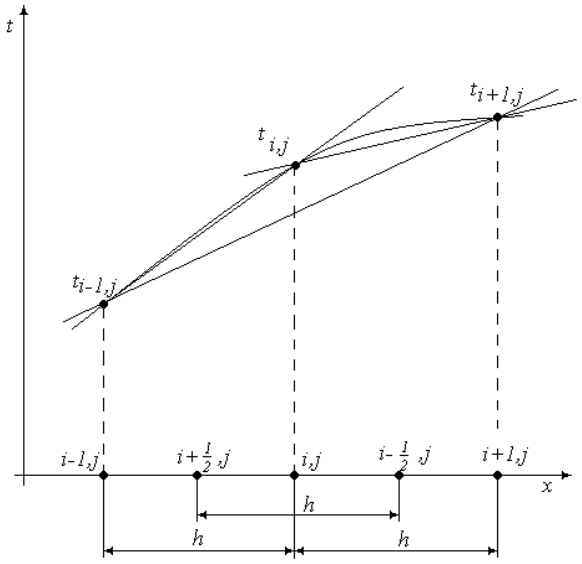


Рис.2. Схема определения разностных производных

Производную от t по x в узле (i, j) можно приближенно заменить на конечно-разностные соотношения следующими способами:

1) $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i,j} \cong \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \cong \frac{t_{i+1,j}-t_{i,j}}{h}$ - разностная производная «вперед» для узла (i, j);

2) $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i,j} \cong \frac{t_{i+1,j}-t_{i-1,j}}{2h}$ - центральная разностная производная;

3) $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i,j} \cong \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j} \cong \frac{t_{i,j}-t_{i-1,j}}{h}$ - разностная производная «назад» для узла (i, j).

Вторую производную можно приближенно получить в виде

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\partial\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)}{\partial x} \cong \frac{\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}j} - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2}j}\right]}{h} \cong \frac{\left[\frac{t_{i+1,j}-t_{i,j}}{h} - \frac{t_{i,j}-t_{i-1,j}}{h}\right]}{h}$$

или

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{i,j} \cong \frac{t_{i+1,j}-2t_{i,j}+t_{i-1,j}}{h^2}. \quad (2)$$

Аналогичным образом, запишем вторую производную по оси y

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)_{i,j} \cong \frac{t_{i,j+1}-2t_{i,j}+t_{i,j-1}}{h^2}. \quad (3)$$

Тогда, заменяя в уравнении (1) вторые производные на конечные разности (2) и (3), получим

$$\frac{t_{i+1,j}-2t_{i,j}+t_{i-1,j}}{h^2} + \frac{t_{i,j+1}-2t_{i,j}+t_{i,j-1}}{h^2} = 0,$$

$$t_{i+1,j} + t_{i-1,j} + t_{i,j+1} + t_{i,j-1} - 4t_{i,j} = 0 \quad (4)$$

или

$$t_{i,j} = \frac{t_{i+1,j}+t_{i-1,j}+t_{i,j+1}+t_{i,j-1}}{4}, \quad (5)$$

т.е. температура в узле (i, j) является среднеарифметическим значением температур в соседних узлах.

Такое уравнение может быть записано для каждой узловой точки (i, j) внутри области L'.

Записав уравнение вида (5) для всех точек внутренней сеточной области L', заменим дифференциальное уравнение (1) целой системой линейных алгебраических уравнений типа (5).

Если внутренних точек области L' было N, то получится система из N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными. Решение этой системы уравнений может быть проведено методом итераций.

Метод итераций заключается в следующем:

1) во всех внутренних точках области L' задаются произвольные значения температур $t_{i,j}$ и эту систему значений обозначают системой №1;

2) во всех внутренних узлах области L' согласно уравнению (5) определяются среднеарифметические значения температур, полученную систему значений обозначают №2 (граничные значения температур на контуре всегда остаются заданными);

3) из системы №2 аналогичным образом получается система №3 и т.д.

Процесс итераций считается законченным тогда, когда в пределах заранее заданной точности система № (n+1) совпадает с системой № n.

В курсах высшей математики показывается, что описанный процесс итераций в данном случае будет сходиться к решению дифференциального уравнения Лапласа (1) с заданными граничными условиями.

Постановка задачи

Найти температурное поле в углу печи (здания) (см.рис.3), если на поверхностях DC и DE задана температура t_{w2}, на поверхностях AB и AF – температура t_{w1}. На поверхностях BC и FE имеют место линейные законы распределения температуры.

Расчет температурного поля провести с помощью метода конечных разностей и метода итераций (2-3 итерации – приближения). Подтвердить значение температур в узловых точках с помощью программы на ЭВМ с точностью расчета δt.

Дать графическое представление результатов ручного расчета и расчета на ЭВМ в виде двумерного температурного поля с изображением на нем трех изотерм (t_{17}, t_{26}, t_{35}).

Сделать выводы по проделанной работе.

Ответить на контрольные вопросы – тест по практическому занятию.

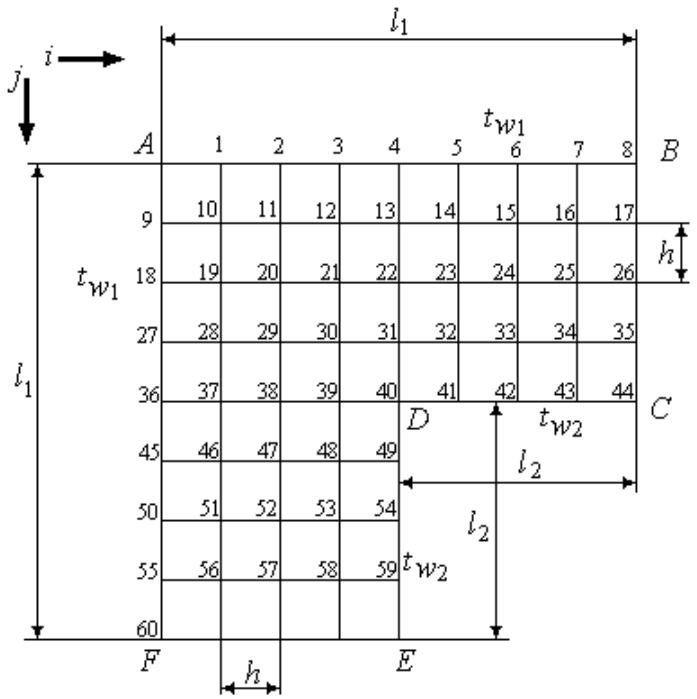


Рис.3. Сеточная область угла здания

Числовые значения температур и размеров области взять из табл.1.

Таблица 1

Номер варианта	l_1, мм	l_2, мм	t_{w1}, °C	t_{w2}, °C	Заданная точность расчета δt, °C	Контрольные вопросы
1	320	160	20	-20	0,1	1, 11, 21
2	200	100	80	0	0,2	2, 12, 22
3	100	50	500	50	1,0	3, 13, 23
4	160	80	30	-10	0,1	4, 14,24
5	120	60	200	20	1,0	5, 15, 25
6	200	100	100	20	0,8	6, 16, 26
7	400	200	800	0	1,5	7, 17, 27
8	80	40	220	20	2,5	8, 18, 28
9	100	50	30	-20	0,4	9, 19, 29
10	600	300	1000	0	2	10, 20, 30
11	120	60	100	10	1,0	1, 12, 23
12	400	200	25	-25	0,5	2, 13, 24
13	240	120	20	-15	0,5	3, 14, 25
14	160	80	150	25	0,2	4, 15, 26
15	200	100	20	-10	0,3	5, 16, 27
16	240	120	500	50	0,4	6, 17, 28
17	160	80	100	10	0,5	7, 18, 29
18	400	200	700	70	0,4	8, 19, 30

Содержание отчета

1. Расчет температурного поля методом итераций (ручной счет двух-трех итераций) с необходимыми пояснениями.
2. Расчет температурного поля на ЭВМ.
3. Графическое представление результатов расчета.
4. Ответы на контрольные вопросы – тест по практическому занятию.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ – ТЕСТ по практическому занятию №1

Укажите в правом столбце правильный ответ!

1)

При стационарной теплопроводности….	
температура в любой точке тела не зависит и не меняется с течением времени	
коэффициент теплопроводности не меняется у тела с течением времени	
температура в любой точке тела меняется с течением времени	

2)

Метод конечных разностей принадлежит к …	
Аналитическим методам решения задач теплопроводности	
Точным аналитическим методам решения задач теплопроводности	
Численным методам решения задач теплопроводности	
Приближенным аналитическим методам решения задач теплопроводности	

3)

Основная идея метода конечных разностей заключается в том, чтобы	
Заменить дифференциальное уравнение теплопроводности на дифференциальное уравнение с обыкновенными производными	
Заменить уравнение Лапласа на дифференциальное уравнение с обыкновенными производными	
Преобразовать систему алгебраических уравнений в конечные разности	
Перевести дифференциальное уравнение в частных производных в алгебраические уравнения с заменой дифференциалов на конечные разности.	

4)

Понятие «итерация» - это по-другому?	
Аппроксимация	
Приближение к верному решению, новый пересчет	
Замена одного другим	
Сходимость данного метода	

5)

Температурное поле двухмерной области без внутренних источников теплоты описывается уравнением…	
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$	
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$	
$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$	
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$	

6)

Одномерное плоское стационарное температурное поле описывается уравнением	
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$	
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$	
$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$	
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$	

7)

Одномерное цилиндрическое температурное поле описывается уравнением	
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$	
$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} = 0$	
$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$	
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$	

8)

Укажите математическое выражение 3-мерного стационарного температурного поля	
$t = f(x, y, z, \tau)$	
$t = f(x, \tau)$	
$t = f(x, y, z)$	
$t = f(x, y, \tau)$	

9)

Укажите математическое выражение одномерного нестационарного температурного поля	
$t = f(x, y, z, \tau)$	
$t = f(x, \tau)$	
$t = f(x, y, z)$	
$t = f(x, y, \tau)$	

10)

Метод сеток – это, по-другому, метод конечных разностей?	
Да	
Нет	

11)

Укажите математическое выражение 1-мерного стационарного температурного поля	
$t = f(x, y, z, \tau)$	
$t = f(x)$	
$t = f(x, z)$	
$t = f(x, \tau)$	

12)

Как называется коэффициент «а» в дифференциальном уравнении $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$?	
Это коэффициент теплоотдачи	
Это коэффициент теплопроводности	
Это коэффициент температуропроводности	

13)

$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$ *Это уравнение в обыкновенных производных?*	
Да	
Нет	

14)

Уравнение $\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$ *можно уже интегрировать?*	
Да	
Нет	

15)

Продолжите предложение: «Процесс итераций считается законченным тогда, когда	
достигнуто нулевое приближение	
в пределах заранее заданной точности система значений искомой функции № (n+1) совпадает с системой № n.	
расчет температуры в некоторых узлах уже приводит к повторению значений по температуре	

16)

Можно ли не учитывать в методе итераций граничные условия на поверхности тела?	
Да	
Нет	

17)

Можно ли процесс итераций считать завершенным, если во всех узлах области погрешность в определении температуры становится меньше, чем заранее заданное значение погрешности вычислений?	
Да	
Нет	

18)

Метод Гаусса – это метод решения системы линейных алгебраических уравнений?	
Да	
Нет	

19)

Какое из приведенных уравнений записано неверно?	
$\frac{d^2t}{dx^2} = 0$	
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$	
$\frac{dt}{d\tau} = a\frac{d^2t}{dx^2}$	

20)

Какое из приведенных уравнений записано неверно?	
$\frac{dt}{d\tau} = a\left(\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{d^2t}{dy^2}\right)$	
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$	
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$	

21)

Какое из дифференциальных уравнений учитывает наличие в теле внутренних источников теплоты?	
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) + \frac{q_v}{C_p \cdot \rho}$	
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$	
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$	

22)

Математическая постановка двумерной задачи стационарной теплопроводности включает в себя	
1. Дифференциальное уравнение теплопроводности 2. Граничные условия на поверхности тела	
1. Дифференциальное уравнение теплопроводности 2. Начальное условие 3. Граничные условия на поверхности тела	
1. Начальные условия 2. Граничные условия на поверхности тела 3. Геометрические условия	

23)

Укажите, верно ли утверждение, что расчет по методу итераций для двумерной области обязательно нужно начинать с крайнего левого узла?	
Нет. Расчет можно начинать с любого узла сеточной области	
Да. Нужно начинать с левого крайнего, т.к. там уже заданы точно две граничные температуры	

24)

Вставьте пропущенное слово: «При расчете двумерной области стационарной теплопроводности для уточнения значений температур в узлах сетки необходимо находить среднеарифметическое значение…соседних узлов?»	
двух	
трех	
четырех	
восьми	

25)

Укажите решение данного уравнения по методу конечных разностей $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$	
$t_{i,j} = \frac{t_{i+1,j} + t_{i-1,j} + t_{i,j+1} + t_{i,j-1}}{4}$	
$t_{i,k+1} = \frac{t_{i+1,k} + t_{i-1,k}}{2}$	
$\frac{t_{i,k+1} - t_{i,k}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k} - 2t_{i,k} + t_{i-1,k}}{\Delta x^2}\right)$	
$\frac{t_{i,k} - t_{i,k-1}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k} - 2t_{i,k} + t_{i-1,k}}{\Delta x^2}\right)$	

26)

Как определяется погрешность расчета после трех итераций?	
Нужно результаты третьей итерации сравнить с результатами второй итерации	
Нужно результаты третьей итерации сравнить с результатами первой итерации	
Нужно результаты третьей итерации сравнить с первоначально заданными значениями в узлах сетки	

27)

Что понимается под двумерной задачей теплопроводности?	
Изменение температурного поля идет по двум направлениям, например x и y.	
Изменение температурного поля идет по координате и времени	
Под двумерной задачей понимается задача теплопроводности с двумя граничными условиями	

28)

Можно ли применить метод конечных разностей для решения двумерной задачи стационарной теплопроводности без использования метода итераций?	
Да, необходимо для всех узлов сеточной области составить конечно-разностные уравнения связи и решить ее методами СЛАУ.	
Нет, только метод итераций позволяет определить значения температур в этом случае	

29)

Количество итераций влияет на точность конечного результата?	
Да, увеличение числа итераций улучшает точность расчетов	
Нет, увеличение числа итераций может привести к ухудшению точности вычислений, вследствие накопления ошибок при округлении	

30)

Если в теле присутствуют внутренние источники теплоты, то задача теплопроводности становится нелинейной?	
Нет	
Да	

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

«Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по явной и неявной схемам»

Цель работы: приобретение навыков расчета одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по явной и неявной схемам.

На практике часто можно встречаются случаи, когда изменение температуры происходит только по одной координате (направлению) и по времени. Например, охлаждение или нагревание плоской неограниченной пластины; стержня, заизолированного с боковой поверхности и др. Одним из наиболее простых методов решения таких одномерных задач нестационарной теплопроводности является метод конечных разностей, реализуемый по, так называемой, **явной или неявной схеме**.

Постановка задачи

Найти температурное поле в теплоизолированном с боковой поверхности ограниченном стержне длиной L (см.рис.4), разделенным на $\underline{\boldsymbol{n}}$ частей, при следующих краевых условиях:

- *начальные условия*: в начальный момент времени температура тела являлась функцией координат и задана во внутренних точках-узлах (i=1,2,…,n-1), то есть

при $\tau = 0$, $t_{i,k} = t_0(x)$;

- *граничные условия*: на левой и правой границах стержня задана и постоянна во времени температура, то есть

при $x = 0$, $t_{0,k} = t_{w1} = const$;
при $x = L$, $t_{n,k} = t_{w2} = const$.

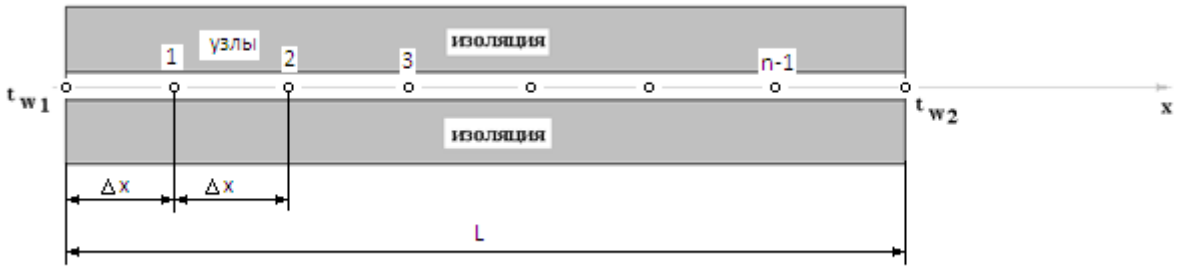


Рис.4. Теплоизолированный с боковой поверхности стержень

Примечание: шаг по времени рассчитать по формуле: $\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2 \cdot a}$, где $\Delta x = \frac{l}{n}$ – шаг по координате.

Числовые значения исходных данных взять из таблицы вариантов (табл.2).

Таблица 2

Номер варианта	Материал	l, м	t_0, °C	t_{w1}, °C	t_{w2}, °C	Физические свойства материала			Количество частей, n	Контрольные вопросы
						λ, Вт/(м*гр)	C_p, Дж/(кг*гр)	ρ, кг/м^3		
1	Асбест распушенный, 3 сорт	0,02	10	30	300	0,087	816	340	8	1, 11, 21
2	Асбест распушенный, 6 сорт	0,05	10	20	200	0,11	816	650	8	2, 12, 22
3	Асбестовый картон	0,02	20	50	140	0,16	816	900	8	3, 13, 23
4	Асбестовый шнур	0,025	20	100	100	0,13	816	800	8	4, 14,24
5	Железобетон набивной	0,04	20	100	20	1,55	840	2200	8	5, 15, 25
6	Асфальт	0,01	20	50	20	0,67	1670	2120	8	6, 16, 26
7	Шлакобетон	0,36	20	50	50	0,7	800	1500	9	7, 17, 27
8	Гипс сухой	0,012	200	0	200	0,43	860	1250	9	8, 18, 28
9	Глина	0,02	300	20	20	0,9	840	2000	9	9, 19, 29
10	Глина огнеупорная	0,01	450	100	150	1,04	1090	1845	9	10, 20, 30
11	Дерево – дуб поперек волокон	0,2	10	30	30	0,21	2390	825	9	1, 12, 23
12	Дерево – дуб вдоль волокон	0,02	10	50	50	0,37	2390	819	9	2, 13, 24
13	Дерево – сосна поперек волокон	0,02	0	50	50	0,15	2720	546	10	3, 14, 25
14	Кирпич красный ручной формовки	0,06	150	150	0	0,7	880	1800	10	4, 15, 26
15	Кирпич красный машинной формовки	0,06	20	200	200	0,77	880	1700	10	5, 16, 27
16	Кирпич силикатный	0,02	10	300	10	0,81	840	1900	10	6, 17, 28
17	Резина твердая	0,03	10	60	10	0,16	1380	1200	10	7, 18, 29
18	Стекло зеркальное	0,03	400	400	80	0,84	779	2550	10	8, 19, 30

Изложение численного метода

Дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности в случае одномерной задачи имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Для численного решения этого уравнения воспользуемся методом конечных разностей или методом сеток.

В соответствии с этим методом на пространственно-временную область ABCD одномерной задачи (см.рис.5) наносится сеточная область с шагом сетки по оси x - Δx и по времени τ - $\Delta\tau$.

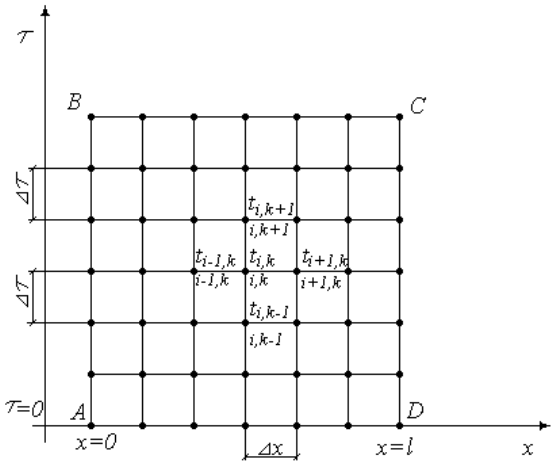


Рис.5. Пространственно-временная область одномерной задачи теплопроводности

Затем уравнение (1) заменяют конечно-разностной аппроксимацией (приближением). Конечно-разностное уравнение (1) может быть сделано по различным схемам.

Для уравнения теплопроводности различают два типа разностных схем: **явную** и **неявную**.

Явную схему мы получим, если возьмем разностное представление производной по времени в (1) «вперед»

$$\frac{t_{i,k+1}-t_{i,k}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k}-2t_{i,k}+t_{i-1,k}}{\Delta x^2}\right) \quad (2)$$

(Здесь выражение для второй производной по координате представлено конечно-разностной аппроксимацией $\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{i,k} \cong \frac{t_{i+1,k}-2t_{i,k}+t_{i-1,k}}{\Delta x^2}$ аналогично тому, что показано в практическом занятии №1).

Отсюда

$$t_{i,k+1} = t_{i,k} + \frac{a\cdot\Delta\tau}{\Delta x^2}\left(t_{i+1,k} - 2t_{i,k} + t_{i-1,k}\right). \quad (3)$$

В частности, при

$$\frac{a\cdot\Delta\tau}{\Delta x^2} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

формула (3) приобретает особенно простой вид

$$t_{i,k+1} = \frac{t_{i+1,k}+t_{i-1,k}}{2}, \quad (5)$$

то есть температура в данном узле для момента времени *k*+1 равна среднеарифметическому значений температур в соседних узлах для момента времени *k*.

Из формул (3) и (5) видно, что температура для последующего момента времени *k*+1 явным образом выражается через температуры для предыдущего момента времени *k*, поэтому схема и называется явной.

Таким образом, начиная с какого-то начального момента времени *k*, можно последовательно вычислить все температуры для моментов *k*+1, *k*+2, *k*+3,…, *k*+*n*.

Исследования показали, что данная схема будет устойчивой, то есть ошибки неточного задания краевых условий и неизбежные промежуточные округления при расчетах не будут возрастать при увеличении шага по времени $\Delta\tau$, если выполняется условие

$$\frac{a\cdot\Delta\tau}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}, \quad (6)$$

откуда

$$\Delta\tau \le \frac{\Delta x^2}{2a}. \quad (7)$$

Последнее условие весьма обременительно. Как показывают практические расчеты, при достаточно малых шагах по координате Δx и конкретных значениях коэффициента температуропроводности *a* величина $\Delta\tau$ оказывается очень малой и приходится делать большое число шагов по времени *τ*. Все это повышает трудоемкость решения.

Таким образом, условие (7) ограничивает использование явной схемы метода конечных разностей для расчета одномерного нестационарного температурного поля.

Рассмотрим теперь **метод конечных разностей, реализуемый по неявной схеме**, когда температуры для последующего момента времени выражаются через одну известную температуру предыдущего момента времени. Неявные разностные уравнения решаются сложнее, чем явные, но они абсолютно устойчивы при любом шаге по времени. Это позволяет выбирать шаг $\Delta\tau$ значительно большим, чем в явных схемах, и соответственно уменьшать общее время счета всей задачи.

Итак, если взять приближенное значение производной по времени «назад» (см.рис.5), то получим следующее конечно-разностное соотношение:

$$\frac{t_{i,k}-t_{i,k-1}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k}-2t_{i,k}+t_{i-1,k}}{\Delta x^2}\right). \quad (8)$$

Это уравнение решается труднее, поскольку в него входят три неизвестные температуры: $t_{i+1,k}$, $t_{i,k}$, $t_{i-1,k}$. Поэтому в данном случае нужно решать сразу всю систему разностных уравнений типа (8) - систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для всех точек-узлов *i,k* сетки.

Методы решения СЛАУ хорошо известны. В данной работе предлагается воспользоваться онлайн-калькулятором сети Интернет, которых на просторах всемирной паутины большое количество (например, matrixcalc.org).

Чтобы использовать онлайн-калькулятор нужно записать для каждой внутренней точки-узла (*i*=1, 2, 3 …*n*-1) уравнение (8) и преобразовать его так, чтобы иметь возможность вносить коэффициенты в ячейки системы уравнений (см. пример выполнения отчета - Приложении 3).

Также для нашего случая можно применить другой численный метод решения одномерной нестационарной задачи теплопроводности - **метод прогонки.**

Изложим метод прогонки на примере.

Уравнение (8) можно также записать через моменты времени *k*+1 и *k*

$$\frac{t_{i,k+1}-t_{i,k}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k+1}-2t_{i,k+1}+t_{i-1,k+1}}{\Delta x^2}\right). \quad (9)$$

По условию нашей задачи начальные и граничные условия будут следующие:
в момент времени *k*=0 температура тела являлась функцией координат и задана во внутренних точках-узлах (*i*=1,2,…,*n*-1)

$$t_{i,k} = t_0(x), \quad (10)$$

а на левой и правой границе температура поддерживается постоянной (ГУ-1 рода)

$$\text{при } x = 0 \quad t_{0,k+1} = t_{w1}, \quad (11)$$

$$\text{при } x = L \quad t_{n,k+1} = t_{w2}. \quad (12)$$

Уравнение (9) для удобства дальнейших выводов запишем в виде

$$t_{i+1,k+1} - (2+p)t_{i,k+1} + t_{i-1,k+1} = -p \cdot t_{i,k}, \quad (13)$$

где $p = \frac{\Delta x^2}{a\cdot\Delta\tau}$.

Идея метода прогонки заключается в следующем: представим связь между двумя температурами соседних узлов $t_{i,k+1}$ и $t_{i+1,k+1}$ в виде

$$t_{i,k+1} = c_{i,k+1}(b_{i,k+1} + t_{i+1,k+1}), \quad (14)$$

где $c_{i,k+1}$ и $b_{i,k+1}$ некоторые коэффициенты, подлежащие определению. Если они будут известны, то делая «прогонку» в направлении справа-налево, начиная с правого граничного условия $t_{n,k+1} = t_{w2}$, можно по (14) последовательно найти все температуры в (*k*+1)-м слое по времени. Из (14), заменяя *i* на *i*-1, имеем

$$t_{i-1,k+1} = c_{i-1,k+1}(b_{i-1,k+1} + t_{i,k+1}), \quad (15)$$

Подставляя (15) в формулу (13), получим

$$t_{i+1,k+1} - (2+p)t_{i,k+1} + c_{i-1,k+1}(b_{i-1,k+1} + t_{i,k+1}) = -p \cdot t_{i,k}. \quad (16)$$

Отсюда

$$t_{i,k+1} = \frac{(c_{i-1,k+1}\cdot b_{i-1,k+1}+p\cdot t_{i,k})+t_{i+1,k+1}}{2+p-c_{i-1,k+1}}. \quad (17)$$

Сравнивая (14) с (17), приходим к следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} c_{i,k+1} &= \frac{1}{2+p-c_{i-1,k+1}} \\ b_{i,k+1} &= c_{i-1,k+1}\cdot b_{i-1,k+1} + p\cdot t_{i,k} \end{aligned}\right\} \text{(система А)}. \quad (18)$$

Причем, система А предназначена для узлов ($i = 2,3,\dots,n-1$).

Для узла *i*=1 из (13) найдем

$$t_{2,k+1} - (2+p)t_{1,k+1} + t_{0,k+1} = -p \cdot t_{1,k}. \quad (19)$$

Или, используя граничное условие (11), из (19) получим

$$t_{1,k+1} = \frac{(t_{w1}+p\cdot t_{1,k})+t_{2,k+1}}{2+p}. \quad (20)$$

С другой стороны, из (14) для узла *i*=1 найдем

$$t_{1,k+1} = c_{1,k+1}(b_{1,k+1} + t_{2,k+1}). \quad (21)$$

Сравнивая (20) и (21), получим

$$\left.\begin{aligned} c_{1,k+1} &= \frac{1}{2+p} \\ b_{1,k+1} &= t_{w1} + p \cdot t_{1,k} \end{aligned}\right\} \text{(система Б)} . \quad (22)$$

Пользуясь формулами систем (А) и (Б), производя «прогонку» слева-направо в прямом направлении, последовательно определяют все коэффициенты $c_{i,k+1}$ и $b_{i,k+1}$ для всех внутренних точек-узлов ($i = 1,2,3, \dots, n-1$).

Затем, используя «обратный ход», то есть прогонку справа-налево, начиная с t_{w2}, как уже было указано, по (14) найдем все температуры в (k+1) слое, если известно распределение температур в k-м слое. Таким образом, указан переход от k-го слоя по времени к (k+1) слою.

Следовательно, отталкиваясь от известного начального (нулевого) слоя или начального распределения температур тела, можно найти решение $t = t(x, \tau)$ во всех точках сетки i,k.

Содержание отчета

1. Расчет температурного поля для трех шагов по времени с необходимыми пояснениями по явной схеме в пространственно-временной области.
2. Расчет температурного поля для трех шагов по времени с необходимыми пояснениями по программе на ЭВМ.
3. Сравнение результатов расчета п.1 и п.2.
4. Графическое представление результатов расчета по результатам п.2.
5. Расчет температурного поля для одного шага по времени с необходимыми пояснениями по неявной схеме, используя метод прогонки.
6. Расчет температурного поля для одного шага по времени с необходимыми пояснениями по неявной схеме, используя онлайн-калькулятор сети Интернет.
7. Сравнение результатов расчета п.4 и п.5.
8. Ответы на контрольные вопросы – тест по практическому занятию.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ – ТЕСТ по практическому занятию №2

Укажите в правом столбце правильный ответ!

1)

choice	0	#3#
При нестационарной теплопроводности….		
Температура в любой точке тела не зависит и не меняется с течением времени		0
Коэффициент теплопроводности не меняется у тела с течением времени		0
Температура в любой точке тела меняется с течением времени		1

2)

choice	0	#3#
Температурное поле одномерной области без внутренних источников теплоты описывается уравнением…		
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$		1
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$		0
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$		0

3)

choice	0	#3#
Одномерное плоское нестационарное температурное поле без внутренних источников теплоты описывается уравнением		
$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$		1
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$		0
$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$		0
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$		0

4)

choice	0	#3#
Одномерное цилиндрическое нестационарное температурное поле описывается уравнением		
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$		0
$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} = 0$		0
$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$		0
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{dr}\right)$		1

5)

choice	0	#3#
Укажите математическое выражение 3-мерного нестационарного температурного поля		
$t = f(x, y, z, \tau)$		1
$t = f(x, \tau)$		0
$t = f(x, y, z)$		0
$t = f(x, y, \tau)$		0

6)

choice	0	#3#
Укажите математическое выражение двухмерного нестационарного температурного поля		
$t = f(x, z, \tau)$		1
$t = f(x, \tau)$		0
$t = f(x, y, z)$		0
$t = f(x, y, z, \tau)$		0

7)

choice	0	#3#
Укажите математическое выражение 1-мерного нестационарного температурного поля		
$t = f(x, y, z, \tau)$		0
$t = f(x)$		0
$t = f(x, z)$		0
$t = f(x, \tau)$		1

8)

choice	0	#3#
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ *- это уравнение в обыкновенных производных?*		
Нет		1
Да		0

9)

choice	0	#3#
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ *-можно ли это уравнение интегрировать?*		
Нет		1
Да		0

10)

choice	0	#3#
Какое из приведенных уравнений записано неверно?		
$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$		0
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$		0
$\frac{dt}{d\tau} = a\frac{d^2 t}{dx^2}$		1

11)

choice	0	#3#
Какое из приведенных уравнений записано неверно?		
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{d^2 t}{dy^2}\right)$		1
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$		0
$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$		0

12)

choice	0	#3#
Математическая постановка одномерной задачи нестационарной теплопроводности включает в себя		
Дифференциальное уравнение теплопроводности Граничные условия на поверхности тела		0
Дифференциальное уравнение теплопроводности Начальное условие Граничные условия на поверхности тела		1
Начальные условия Граничные условия на поверхности тела Геометрические условия		0

13)

choice	0	#3#
Какое уравнение является заменой уравнения $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ *согласно метода конечных разностей по явной схеме*		
$t_{i,j} = \frac{t_{i+1,j} + t_{i-1,j} + t_{i,j+1} + t_{i,j-1}}{4}$		0
$t_{i,k+1} = \frac{t_{i+1,k} + t_{i-1,k}}{2}$		0
$\frac{t_{i,k+1} - t_{i,k}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k} - 2t_{i,k} + t_{i-1,k}}{\Delta x^2}\right)$		1
$\frac{t_{i,k} - t_{i,k-1}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k} - 2t_{i,k} + t_{i-1,k}}{\Delta x^2}\right)$		0

14)

choice	0	#3#
Какое уравнение является заменой уравнения $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ *согласно метода конечных разностей по неявной схеме*		
$t_{i,j} = \frac{t_{i+1,j} + t_{i-1,j} + t_{i,j+1} + t_{i,j-1}}{4}$		0
$t_{i,k+1} = \frac{t_{i+1,k} + t_{i-1,k}}{2}$		
$\frac{t_{i,k+1} - t_{i,k}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k} - 2t_{i,k} + t_{i-1,k}}{\Delta x^2}\right)$		
$\frac{t_{i,k} - t_{i,k-1}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k} - 2t_{i,k} + t_{i-1,k}}{\Delta x^2}\right)$		1

15)

choice	0	#3#
Если индекс «i» отвечает за шаг по координате, а индекс «k» за шаг по времени, то как понимать выражение $(t_{i+1,k} + t_{i-1,k})$*?*		
Это сумма температур двух соседних узлов в настоящий и последующий момент времени		0
Это сумма температур двух соседних узлов в настоящий момент времени		1
Это сумма температур одного и того же узла, но в различные моменты времени		0

16)

choice	0	#3#
Если индекс «i» отвечает за шаг по координате, а индекс «k» за шаг по времени, то как понимать выражение $(t_{i,k+1} - t_{i,k})$*?*		
Это разность температур двух соседних узлов в настоящий и последующий момент времени		0
Это разность температур одного и того же узла через один шаг по времени		1
Это разность температур двух соседних узлов через один шаг по времени		0

17)

choice	0	#3#
Если индекс «i» отвечает за шаг по координате, а индекс «k» за шаг по времени, то как понимать выражение $t_{i,k+1} = \frac{t_{i+1,k}+t_{i-1,k}}{2}$*?*		
Температура в данном узле – это среднеарифметическое между температурами в двух соседних узлах предыдущего момента времени		1
Температура в узле предыдущего момента времени определяется как сумма температур двух соседних узлов последующего момента времени		0
Температура в данном узле момента времени «k+1» - это есть сумма температур соседних узлов в момент времени «k».		0

18)

choice	0	#3#
Ограничивается ли шаг по времени $\Delta\tau$ *в явной схеме метода конечных разностей?*		
Нет, шаг по времени можно выбрать любой, если расчет проводить сразу для всех узлов сетки, решая полученную систему линейных алгебраических уравнений		0
Да, шаг по времени ограничен, если принять условие $\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$, которое приводит к существенному упрощению расчета температуры в узле сетки.		1

19)

choice	0	#3#
Шаг по времени в явной схеме, при расчете температуры в узле по формуле $t_{i,k+1} = \frac{t_{i+1,k}+t_{i-1,k}}{2}$*, должен ли быть обязательно равен выражению* $\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2a}$*?*		
Да, для явной схемы он определяется только по этому выражению		0
Нет, об может быть выбран и меньше полученного значения $\Delta\tau$		1
Нет, для явной схемы шаг по времени может быть выбран любым		0

20)

choice	0	#3#
Ограничивается ли шаг по времени $\Delta\tau$ *в неявной схеме метода конечных разностей?*		
Нет, шаг по времени можно выбрать любой, так как расчет проводится сразу для всех узлов сетки		1
Да, шаг по времени ограничен, если принять условие $\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$, которое приводит к существенному упрощению расчета температуры в узле сетки.		0

21)

choice	0	#3#
Почему одна из схем в методе конечных разностей называется «явной»?		
Так как при замене дифференциального уравнения теплопроводности на уравнение в конечных разностях в полученном алгебраическом уравнении всего одна неизвестная, которую можно сразу определить		1
Так как полученное решение оказывается очень простым для последующих расчетов		0
Так как зависимость между температурой в последующий момент времени явным образом связана с температурой в предыдущий момент времени		0

22)

choice	0	#3#
Почему одна из схем в методе конечных разностей называется «неявной»?		
Так как зависимость между температурой в последующий момент времени неявным образом связана с температурой в предыдущий момент времени		0
Так как при нахождении решения дифференциального уравнения нужно задействовать метод разделения переменных Фурье		0
Так как при замене дифференциального уравнения теплопроводности на уравнение в конечных разностях в полученном алгебраическом уравнении два или три неизвестных, которые сразу определить невозможно		1

23)

choice	0	#3#
Как определяется шаг по координате в случае одномерной нестационарной задачи теплопроводности?		
Шаг по координате – это отношение длины тела на количество шагов по времени		0
Шаг по координате – это отношение длины тела на количество разбиваемых частей		1

24)

choice	0	#3#
Укажите «плюсы» и «минусы» явной схемы.		
«плюсы» - простота, легкий расчет; «минусы» - зависит от шага по времени, который может быть относительно малым, вследствие чего количество расчетов многократно может возрасти. Если же шаг по времени выбрать более чем $\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2a}$, то расчет вообще получится неверным.		1
«Плюсы» - нет зависимости от шага по времени, т.е. шаг по времени выбирается любой, и расчет получается достаточно точным; «минусы» - схема расчета достаточно сложна, приходится применять дополнительные знания по решению системы алгебраических уравнений		0

25)

choice	0	#3#
Укажите «плюсы» и «минусы» неявной схемы.		
«плюсы» - простота, легкий расчет; «минусы» - зависит от шага по времени, который может быть относительно малым, вследствие чего количество расчетов многократно может возрасти. Если же шаг по времени выбрать более чем $\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2a}$, то расчет вообще получится неверным.		0
«Плюсы» - нет зависимости от шага по времени, т.е. шаг по времени выбирается любой, и расчет получается достаточно точным; «минусы» - схема расчета достаточно сложна, приходится применять дополнительные знания по решению системы алгебраических уравнений		1

26)

choice	0	#3#
Какая из схем является устойчивой, т.е. ошибки при неточном задании краевых условий и округления не будут влиять на конечный результат?		
Явная схема		0
Неявная схема		1

27)

choice	0	#3#
Как определить коэффициент температуропроводности?		
Это есть отношение коэффициента теплопроводности на произведение изобарной теплоемкости на плотность вещества		1
Это есть отношение изобарной теплоемкости на коэффициент теплопроводности		0

28)

choice	0	#3#
При замене дифференциального уравнения теплопроводности на уравнение в конечных разностях согласно неявной схеме сколько узлов связаны полученной алгебраической зависимостью?		
Два соседних узла		0
Три соседних узла		1
Четыре соседних узла		0

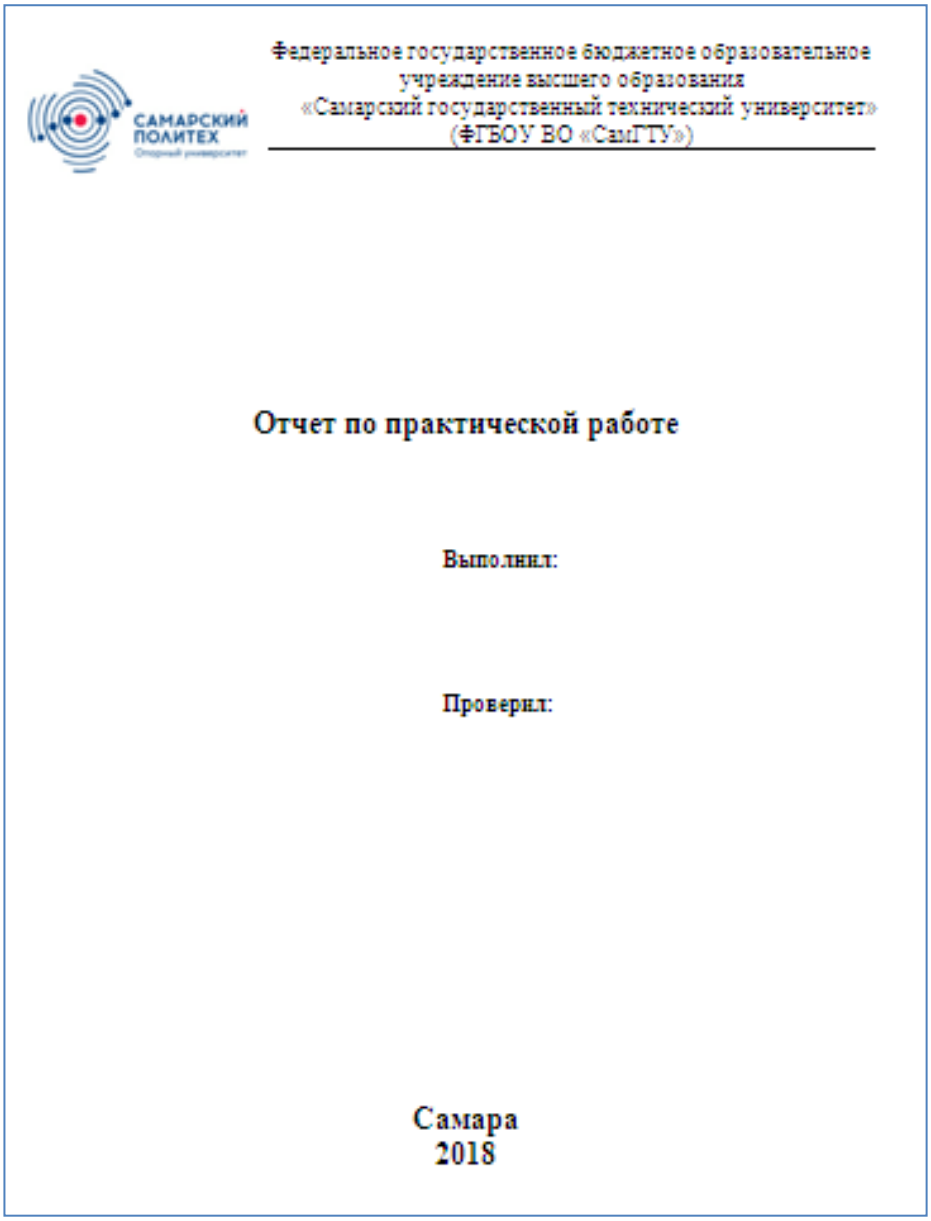
29)

choice	0	#3#
Согласно метода прогонки между собой связываются… через коэффициенты «а» и «в»		
Два соседних узла		1
Три соседних узла		0
Четыре соседних узла		0

30)

choice	0	#3#
В чем суть метода прогонки?		
Определение коэффициентов связи «а» и «в» слева-направо и затем определение температур в узлах, используя эти коэффициенты, справо-налево.		1
Необходимо записать систему алгебраических линейных уравнений таким образом, чтобы потом, используя онлайн-калькулятор сети Интернет, решить полученную систему		0

Приложение 1



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВО «СамГТУ»)

Отчет по практической работе

Выполнил:

Проверил:

Самара
2018

Образец титульного листа отчета

Приложение 2

Отчет по практическому занятию №1
«Применение метода конечных разностей
в двумерных задачах стационарной теплопроводности»

Цель работы - приобретение навыков расчета двумерных задач стационарной теплопроводности методом конечных разностей (методом сеток) и методом итераций.

Постановка задачи

Найти температурное поле в углу печи (здания) (рис.3), если на поверхностях *DC* и *DE* задана температура t_{w2}, на поверхностях *AB* и *AF* – температура t_{w1}. На поверхностях *BC* и *FE* имеют место линейные законы распределения температуры.

Расчет на ЭВМ производить с точностью δt.

Дать графическое представление результатов ручного расчета и расчета на ЭВМ в виде двумерного температурного поля с изображением на нем трех изотерм (t_{17}, t_{26}, t_{35}).

Сделать выводы по проделанной работе.

Ответить на контрольные вопросы – тест по практическому занятию.

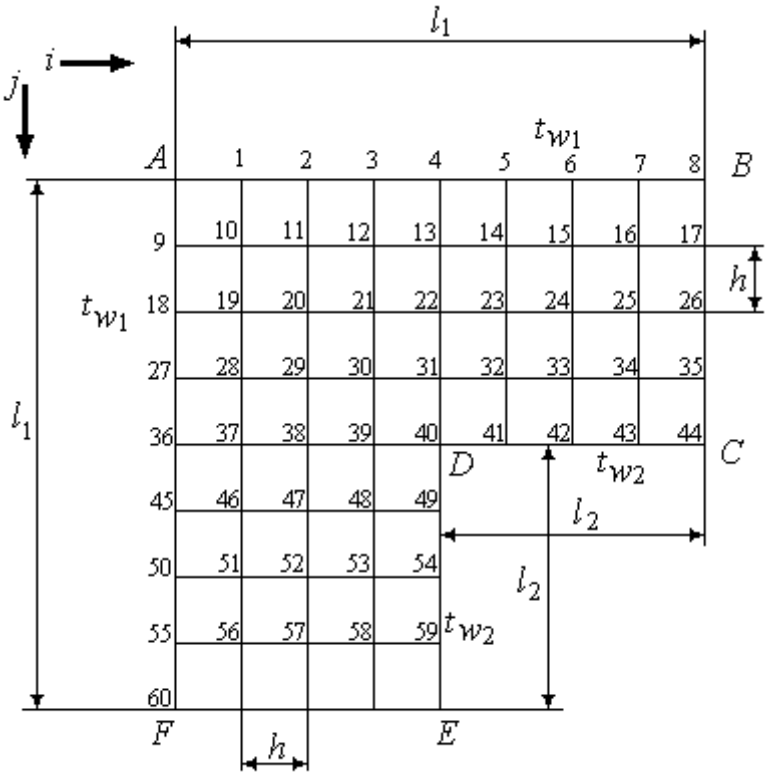


Рис.1. Сеточная область угла здания

Числовые значения температуры и размеров области из табл.1.

Таблица 1

Номер варианта	l_1, мм	l_2, мм	t_{w1}, °С	t_{w2}, °С	Заданная точность расчета δt, °С	Контрольные вопросы
8	80	40	220	20	2,5	8, 18, 28

1. **Расчет температурного поля методом итераций (ручной счет двух итераций) с необходимыми пояснениями.**

Рассчитаем сначала температуры на боковых поверхностях BC и FE, где по условию заданы линейные законы распределения температур. Так как сторона BC разделена на 4 части, то для определения температуры в узле 17, нужно

$t_{17} = t_8 - \frac{(t_8 - t_{44})}{4} = t_{w1} - \frac{(t_{w1} - t_{w2})}{4} = 220 - \frac{(220-20)}{4} = 170\ ,\ ^0C.$

В середине стороны BC, т.е. в узле 26, температуру можно найти

$$t_{26} = \frac{(t_8 + t_{44})}{2} = \frac{(t_{w1} + t_{w2})}{2} = \frac{(220+20)}{2} = 120\ ,\ ^0C.$$

В узле 35 температура определится так

$t_{35} = t_8 - \frac{3(t_8 - t_{44})}{4} = t_{w1} - \frac{3(t_{w1} - t_{w2})}{4} = 220 - \frac{3\cdot(220-20)}{4} = 70\ ,\ ^0C.$

На стороне FE, вследствие симметрии, температуры будут равны

$$t_{61} = t_{17} = 170\ ,\ ^0C.$$
$$t_{62} = t_{26} = 120\ ,\ ^0C.$$
$$t_{63} = t_{35} = 70\ ,\ ^0C.$$

1 ИТЕРАЦИЯ

Согласно уравнению (5) температура в любом внутреннем узле области находится как среднеарифметическое значение четырех соседних узлов. Для начала расчетов примем значения температуры во внутренней области как среднее между t_{w1} и t_{w2} , т.е. $120\ ^0C$. Расчет начнем с 10 внутреннего узла, т.к. там точно заданы две граничные температуры.

$$t_{10}^{'} = \frac{t_9 + t_1 + t_{11} + t_{19}}{4} = \frac{220+220+120+120}{4} = 170\ \ ^0C.$$

Температуру в 11 внутреннем узле будем искать, используя уже найденную (уточненную) температуру в 10 узле.

$$t_{11}^{'} = \frac{t_{10}^{'} + t_2 + t_{12} + t_{20}}{4} = \frac{170+220+120+120}{4} = 157{,}5\ \ ^0C.$$

Аналогичным образом проведем расчет других внутренних узлов

$$t_{12}^{'} = \frac{t_{11}^{'} + t_3 + t_{13} + t_{21}}{4} = \frac{157{,}5+220+120+120}{4} = 154{,}4\ \ ^0C.$$
$$t_{13}^{'} = \frac{t_{12}^{'} + t_4 + t_{14} + t_{22}}{4} = \frac{154{,}4+220+120+120}{4} = 153{,}6\ \ ^0C.$$
$$t_{14}^{'} = \frac{t_{13}^{'} + t_5 + t_{15} + t_{23}}{4} = \frac{153{,}6+220+120+120}{4} = 153{,}4\ \ ^0C.$$
$$t_{15}^{'} = \frac{t_{14}^{'} + t_6 + t_{16} + t_{24}}{4} = \frac{153{,}4+220+120+120}{4} = 153{,}35\ \ ^0C.$$
$$t_{16}^{'} = \frac{t_{15}^{'} + t_7 + t_{17} + t_{25}}{4} = \frac{153{,}35+220+170+120}{4} = 165{,}8\ \ ^0C.$$

$t_{19}^{'} = t_{11}^{'} = 157{,}5\ \ ^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.

$$t_{20}^{'} = \frac{t_{19}^{'} + t_{11}^{'} + t_{21} + t_{29}}{4} = \frac{157{,}5+157{,}5+120+120}{4} = 138{,}75\ \ ^0C.$$
$$t_{21}^{'} = \frac{t_{20}^{'} + t_{12}^{'} + t_{22} + t_{30}}{4} = \frac{138{,}75+154{,}4+120+120}{4} = 133{,}3\ \ ^0C.$$
$$t_{22}^{'} = \frac{t_{21}^{'} + t_{13}^{'} + t_{23} + t_{31}}{4} = \frac{133{,}3+153{,}6+120+120}{4} = 131{,}7\ \ ^0C.$$
$$t_{23}^{'} = \frac{t_{22}^{'} + t_{14}^{'} + t_{24} + t_{32}}{4} = \frac{131{,}7+153{,}4+120+120}{4} = 131{,}3\ \ ^0C.$$
$$t_{24}^{'} = \frac{t_{23}^{'} + t_{15}^{'} + t_{25} + t_{33}}{4} = \frac{131{,}3+153{,}35+120+120}{4} = 131{,}2\ \ ^0C.$$
$$t_{25}^{'} = \frac{t_{24}^{'} + t_{16}^{'} + t_{26} + t_{34}}{4} = \frac{131{,}2+165{,}8+120+120}{4} = 134{,}25\ \ ^0C.$$

$t_{28}^{'} = t_{12}^{'} = 154{,}4\ \ ^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.

$t_{29}^{'} = t_{21}^{'} = 133{,}3\ \ ^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.

$$t_{30}^{'} = \frac{t_{29}^{'} + t_{21}^{'} + t_{31} + t_{39}}{4} = \frac{133{,}3+133{,}3+120+120}{4} = 126{,}65\ \ ^0C.$$

$$t_{31}^{'} = \frac{t_{30}^{'}+t_{22}^{'}+t_{32}+t_{40}}{4} = \frac{126{,}65+131{,}7+120+20}{4} = 99{,}6\ {}^0C.$$

$$t_{32}^{'} = \frac{t_{31}^{'}+t_{23}^{'}+t_{33}+t_{41}}{4} = \frac{99{,}6+131{,}3+120+20}{4} = 92{,}7\ {}^0C.$$

$$t_{33}^{'} = \frac{t_{32}^{'}+t_{24}^{'}+t_{34}+t_{42}}{4} = \frac{92{,}7+131{,}2+120+20}{4} = 91\ {}^0C.$$

$$t_{34}^{'} = \frac{t_{33}^{'}+t_{25}^{'}+t_{35}+t_{43}}{4} = \frac{91+134{,}25+70+20}{4} = 78{,}8\ {}^0C.$$

$t_{37}^{'} = t_{13}^{'} = 153{,}6\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{38}^{'} = t_{22}^{'} = 131{,}7\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{39}^{'} = t_{31}^{'} = 99{,}6\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{46}^{'} = t_{14}^{'} = 153{,}4\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{47}^{'} = t_{23}^{'} = 131{,}3\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{48}^{'} = t_{32}^{'} = 92{,}7\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{51}^{'} = t_{15}^{'} = 153{,}35\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{52}^{'} = t_{24}^{'} = 131{,}2\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{53}^{'} = t_{33}^{'} = 91\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{56}^{'} = t_{16}^{'} = 165{,}8\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{57}^{'} = t_{25}^{'} = 134{,}25\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.
$t_{58}^{'} = t_{34}^{'} = 78{,}8\ {}^0C$ - вследствие геометрической симметрии тела и граничных условий.

2 ИТЕРАЦИЯ

При повторном вычислении будем использовать значения температуры во внутренних узлах из первой итерации.

$$t_{10}^{''} = \frac{t_9+t_1+t_{11}^{'}+t_{19}^{'}}{4} = \frac{220+220+157{,}5+157{,}5}{4} = 188{,}75\ {}^0C.$$

Аналогичным образом рассчитаем температуры и в других внутренних узлах

$t_{11}^{''} = 175{,}5\ {}^0C$; $t_{12}^{''} = 170{,}6\ {}^0C$; $t_{13}^{''} = 169\ {}^0C$; $t_{14}^{''} = 168{,}4\ {}^0C$; $t_{15}^{''} = 171{,}35\ {}^0C$; $t_{16}^{''} = 173{,}9\ {}^0C$; $t_{19}^{''} = t_{11}^{''} = 175{,}5\ {}^0C$; $t_{20}^{''} = 154{,}4\ {}^0C$; $t_{21}^{''} = 145{,}8\ {}^0C$; $t_{22}^{''} = 136{,}4\ {}^0C$; $t_{23}^{''} = 132{,}2\ {}^0C$; $t_{24}^{''} = 132{,}2\ {}^0C$; $t_{25}^{''} = 126{,}2\ {}^0C$; $t_{28}^{''} = 170{,}6\ {}^0C$; $t_{29}^{''} = 145{,}8\ {}^0C$; $t_{30}^{''} = 122{,}7\ {}^0C$; $t_{31}^{''} = 92{,}5\ {}^0C$; $t_{32}^{''} = 83{,}9\ {}^0C$; $t_{33}^{''} = 78{,}7\ {}^0C$; $t_{34}^{''} = 73{,}7\ {}^0C$; $t_{37}^{''} = 169\ {}^0C$; $t_{38}^{''} = 136{,}4\ {}^0C$; $t_{34}^{''} = 73{,}7\ {}^0C$; $t_{39}^{''} = 92{,}5\ {}^0C$; $t_{46}^{''} = 168{,}4\ {}^0C$; $t_{47}^{''} = 132{,}2\ {}^0C$; $t_{48}^{''} = 83{,}9\ {}^0C$; $t_{51}^{''} = 171{,}35\ {}^0C$; $t_{52}^{''} = 132{,}2\ {}^0C$; $t_{53}^{''} = 78{,}7\ {}^0C$; $t_{56}^{''} = 173{,}9\ {}^0C$; $t_{57}^{''} = 126{,}2\ {}^0C$; $t_{58}^{''} = 73{,}7\ {}^0C$.

2. Расчет температурного поля на ЭВМ.

```
Савельев


*************** ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ **************
TW1=   220.000   TW2=    20.000   TT=     2.500

************* РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА *************
220.00  220.00  220.00  220.00  220.00  220.00  220.00  220.00  220.00
220.00  206.05  193.18  182.51  174.63  170.56  169.09  169.22  170.00
220.00  193.18  168.27  146.45  129.84  121.71  119.04  118.95  120.00
220.00  182.51  146.45  112.76   82.47   72.58   69.60   69.35   70.00
220.00  174.63  129.84   82.47   20.00   20.00   20.00   20.00   20.00
220.00  170.56  121.71   72.58   20.00
220.00  169.09  119.04   69.60   20.00
220.00  169.22  118.95   69.35   20.00
220.00  170.00  120.00   70.00   20.00
```

3. Графическое представление результатов расчета.

По результатам расчета получили следующее температурное поле (рис.2а, 2б), в котором изобразили три изотермы ($170\ ^0C, 120\ ^0C, 70\ ^0C$).

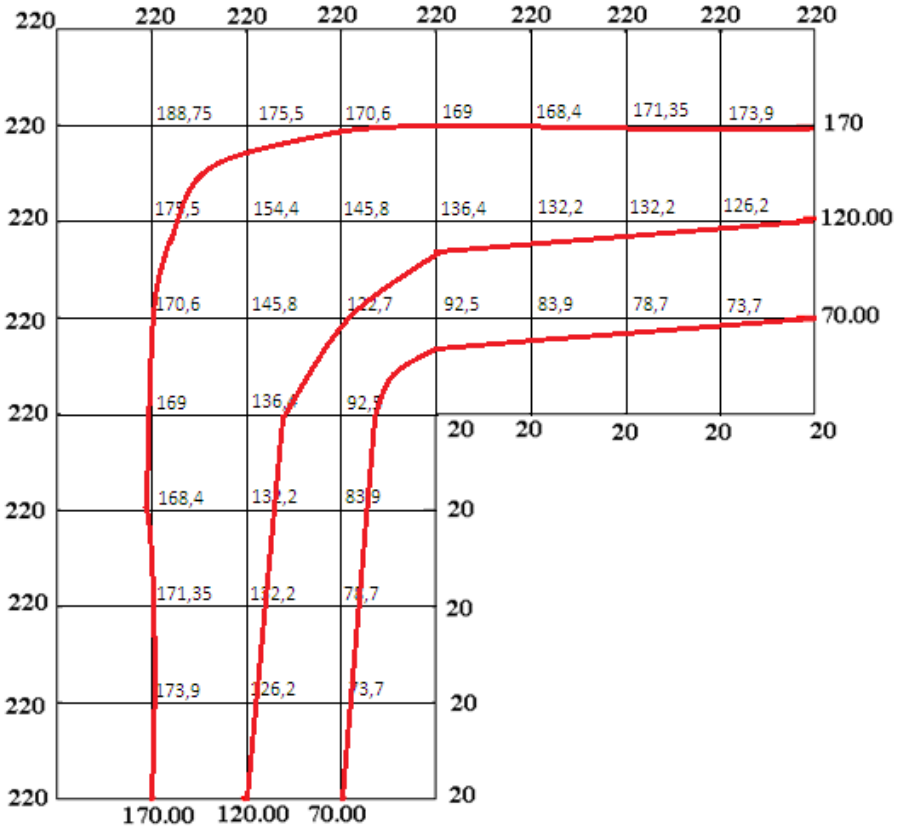


Рис.2а. Результаты ручного расчета после двух итераций

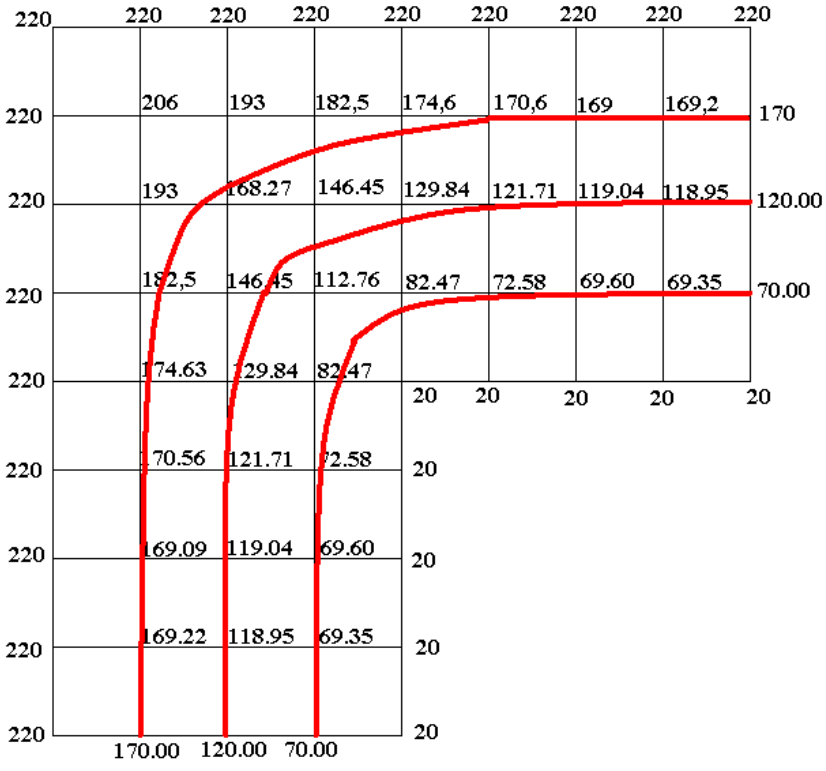


Рис.2б. Результаты расчета на ЭВМ до заданной точности

Выводы по проделанной работе и полученным результатам расчета:

- освоен алгоритм расчета двумерного стационарного температурного поля методом конечных разностей и методом итераций;
- проведено сравнение результатов расчета после двух итераций и расчета на ЭВМ до заданной точности, которое позволило определить погрешность в определении истинных значений температуры в исследуемой области;
- представлено наглядное изображение температурного поля с отмеченными на нем тремя изотермами;
- даны ответы на контрольные вопросы – тест по практическому занятию.

4. Ответы на контрольные вопросы – тест по практическому занятию

8)

Укажите математическое выражение 3-мерного стационарного температурного поля	
$t = f(x, y, z, \tau)$	
$t = f(x, \tau)$	
$t = f(x, y, z)$	+
$t = f(x, y, \tau)$	

18)

Метод Гаусса – это метод решения системы линейных алгебраических уравнений?	
Да	+
Нет	

28)

Можно ли применить метод конечных разностей для решения двумерной задачи стационарной теплопроводности без использования метода итераций?	
Да, необходимо для всех узлов сеточной области составить конечно-разностные уравнения связи и решить ее методами СЛАУ.	+
Нет, только метод итераций позволяет определить значения температур в этом случае	

Приложение 3

Отчет по практическому занятию №2
«Численное решение одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по явной и неявной схемам»

Цель работы: приобретение навыков расчета одномерных задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей по явной и неявной схемам.

Постановка задачи

Найти температурное поле в теплоизолированном с боковой поверхности ограниченном стержне длиной L (см.рис.4), разделенным на $\boldsymbol{n}$ частей, при следующих краевых условиях:

- *начальные условия*: в начальный момент времени температура тела являлась функцией координат и задана во внутренних точках-узлах (i=1,2,…,n-1), то есть

$$\text{при } \tau = 0,\ t_{i,k} = t_0(x);$$

- *граничные условия*: на левой и правой границах стержня задана и постоянна во времени температура, то есть

$$\text{при } x = 0,\ t_{0,k} = t_{w1} = const;$$
$$\text{при } x = L,\ t_{n,k} = t_{w2} = const.$$

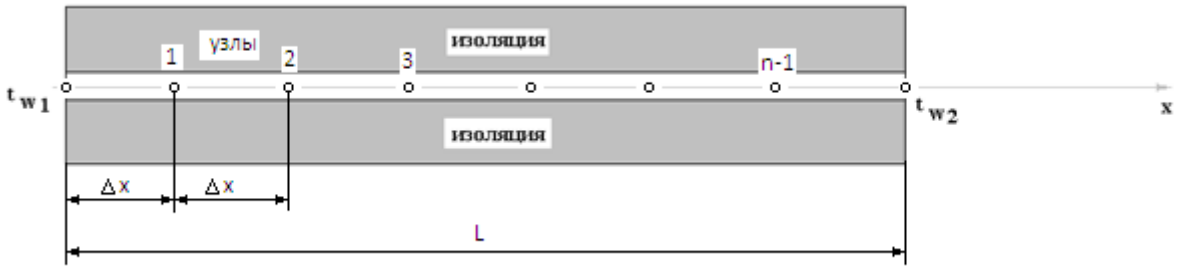


Рис.1. Теплоизолированный с боковой поверхности стержень

Примечание: шаг по времени рассчитать по формуле: $\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2 \cdot a}$, где $\Delta x = \frac{l}{n}$ – шаг по координате.

Числовые значения исходных данных взять из таблицы вариантов (табл.2).

Таблица 2

Номер варианта	Материал	l, м	t_0, °C	t_{w1}, °C	t_{w2}, °C	Физические свойства материала			Количество частей, n	Контрольные вопросы
						λ, Вт/(м*гр)	C_p, Дж/(кг*гр)	ρ, кг/м^3		
8	Шлакобетон	0,36	20	50	50	0,7	800	1500	8	8, 18, 28

1. Расчет температурного поля для трех моментов времени с необходимыми пояснениями по явной схеме.

Согласно формуле (5) температура в узле для момента времени k+1 равна среднеарифметическому из значений температур в соседних узлах для момента времени k. Значит, в узле 1 для следующего (после начального) момента времени (к=1) температура определится как

$$t_{1,к=1} = \frac{t_{0,к=0} + t_{2,к=0}}{2} = \frac{50+20}{2} = 35\ ^{o}\text{C}\ .$$

Рассчитывая аналогично для других внутренних узлов, получим распределение температуры в стержне для момента времени k=1, учитывая, что условия на границе тела заданы и не изменяются. Далее используя распределение температур для момента времени k=1, определим также по формуле (5) распределение температур для момента времени k=2 и k=3. Результаты расчетов представлены на рис.2.

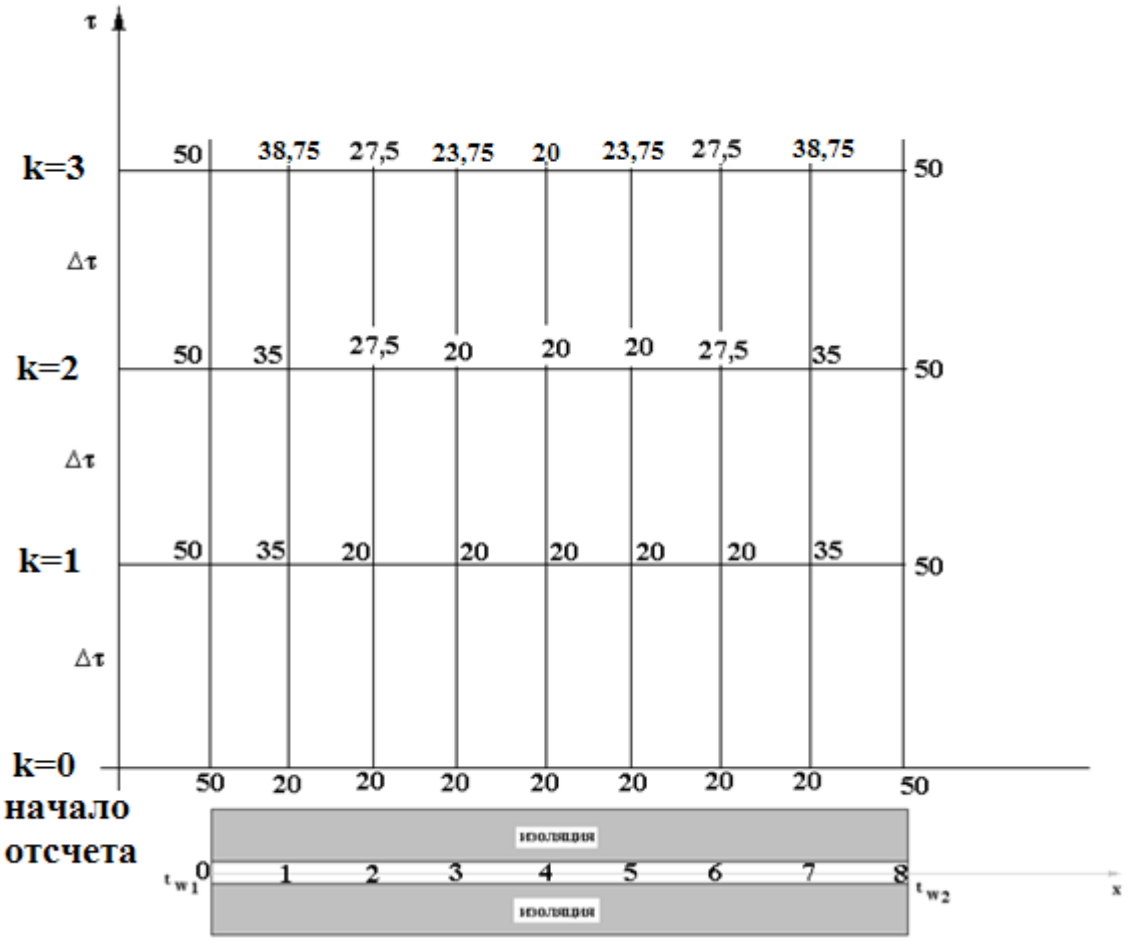


Рис.2. Результаты расчетов для трех шагов по времени

2. Результаты расчета температурного поля на ЭВМ

Для внесения необходимых данных в программу для расчета температур стержня определим следующие величины:

- примем разбивку стержня на восемь частей (согласно своего варианта), то есть $n = 8$.
- коэффициент температуропроводности

$$a = \frac{\lambda}{C_p \rho} = \frac{0{,}7}{800 \cdot 1500} = 5{,}833 \cdot 10^{-7} \ \frac{м^2}{сек}.$$

- шаг по координате

$$\Delta x = \frac{l}{n} = \frac{0{,}36}{8} = 0{,}045 \ м.$$

- максимальный шаг по времени определим по формуле (7)

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2 \cdot a} = \frac{0{,}045^2}{2 \cdot 5{,}833 \cdot 10^{-7}} = 1735{,}8 \ сек.$$

Необходимо выбрать шаг по времени меньше полученного, поэтому примем

$$\Delta\tau = 1500 \ сек = 25 \ мин.$$

- количество шагов по времени выберем 10. (Количество шагов по времени в отчете достаточно указать всего три).

Савельев

********** ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ **********

AT=	.583E-06	DL=	.360	T0=	20.000
TL=	50.000	TP=	50.000	HT=	1500.000
NT=	10	NX=	8		

********** РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА **********

K=0	50.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	50.00
K=1	50.00	32.96	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	32.96	50.00
K=2	50.00	34.72	25.59	20.00	20.00	20.00	25.59	34.72	50.00
K=3	50.00	37.38	27.12	22.42	20.00	22.42	27.12	37.38	50.00
K=4	50.00	38.40	29.52	23.40	22.09	23.40	29.52	38.40	50.00
K=5	50.00	39.57	30.71	25.48	23.22	25.48	30.71	39.57	50.00
K=6	50.00	40.25	32.28	26.77	25.17	26.77	32.28	40.25	50.00
K=7	50.00	41.02	33.34	28.46	26.55	28.46	33.34	41.02	50.00
K=8	50.00	41.58	34.55	29.74	28.20	29.74	34.55	41.58	50.00
K=9	50.00	42.18	35.51	31.15	29.53	31.15	35.51	42.18	50.00
K=10	50.00	42.68	36.51	32.33	30.93	32.33	36.51	42.68	50.00

Построим график распределения температур в стержне для следующих моментов времени (к=1, к=3, к=5, к=7, к=9)

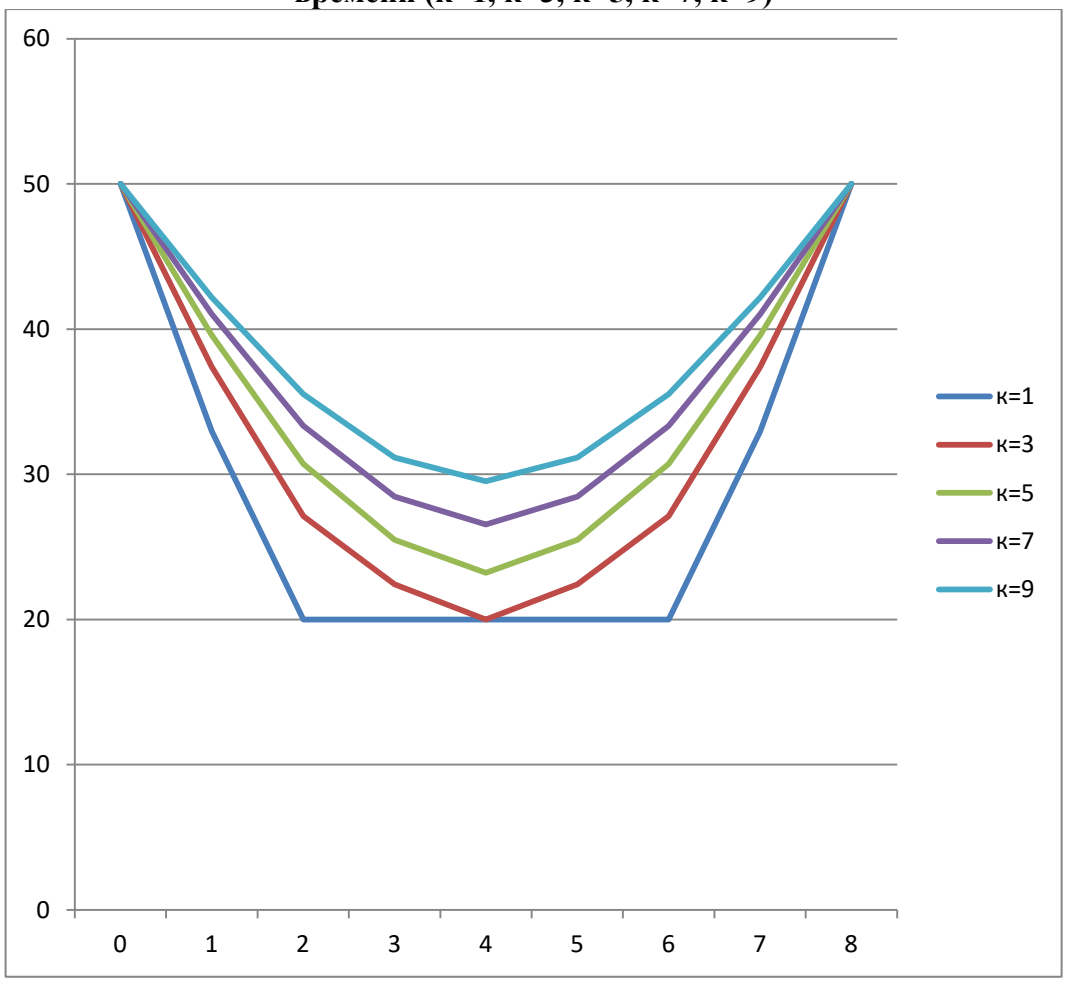


Рис.3. Распределение температур стержня в различные моменты времени

Сравнивая результаты расчетов, приходим к выводу, что значения температур в узлах совпали.

3. Расчет температурного поля для одного шага по времени методом прогонки

Теперь решим ту же самую задачу другим методом – методом прогонки.

Далее в качестве примера взяты следующие исходные данные:

Номер варианта	$a \cdot 10^6$,м^2/с	l,м	t_0,°С	t_{w1},°С	t_{w2},°С	n
8	0,1	0,15	50	200	200	10

Найдем сначала шаг по координате

$$\Delta x = \frac{l}{n} = \frac{0{,}15}{10} = 0{,}015\ ,м.$$

Тогда шаг по времени будет

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2 \cdot a} = \frac{0{,}015^2}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6}} = 1125\ ,сек.$$

Пользуясь системами (А) и (В), производя «прогонку» слева-направо в прямом направлении, последовательно найдем все коэффициенты $c_{i,k+1}, b_{i,k+1}$ $(i = 1,2,3 \dots 9)$, предварительно определив постоянную p.

$$p = \frac{\Delta x^2}{a \cdot \Delta\tau} = 2.$$

$$c_{1,k+1} = \frac{1}{2+p} = \frac{1}{2+2} = 0{,}25.$$

$$b_{1,k+1} = t_{w1} + p \cdot t_{1,k} = 200 + 2 \cdot 50 = 300.$$

$$c_{2,k+1} = \frac{1}{2+p-c_{1,k+1}} = \frac{1}{2+2-0{,}25} = 0{,}267.$$

$$b_{2,k+1} = c_{1,k+1} \cdot b_{1,k+1} + p \cdot t_{2,k} = 0{,}25 \cdot 300 + 2 \cdot 50 = 175.$$

$$c_{3,k+1} = \frac{1}{2+p-c_{2,k+1}} = \frac{1}{2+2-0{,}267} = 0{,}268.$$

$$b_{3,k+1} = c_{2,k+1} \cdot b_{2,k+1} + p \cdot t_{3,k} = 0{,}267 \cdot 175 + 2 \cdot 50 = 146{,}725.$$

$$c_{4,k+1} = \frac{1}{2+p-c_{3,k+1}} = \frac{1}{2+2-0{,}268} = 0{,}268.$$

$$b_{4,k+1} = c_{3,k+1} \cdot b_{3,k+1} + p \cdot t_{4,k} = 0{,}268 \cdot 146{,}725 + 2 \cdot 50 = 139{,}3223.$$

$$c_{5,k+1} = \frac{1}{2+p-c_{4,k+1}} = \frac{1}{2+2-0{,}268} = 0{,}268.$$

$$b_{5,k+1} = c_{4,k+1} \cdot b_{4,k+1} + p \cdot t_{5,k} = 0{,}268 \cdot 139{,}3223 + 2 \cdot 50 = 137{,}338.$$

$$c_{6,k+1} = \frac{1}{2+p-c_{5,k+1}} = \frac{1}{2+2-0{,}268} = 0{,}268.$$

$$b_{6,k+1} = c_{5,k+1} \cdot b_{5,k+1} + p \cdot t_{6,k} = 0{,}268 \cdot 137{,}338 + 2 \cdot 50 = 136{,}807.$$

$$c_{7,k+1} = \frac{1}{2+p-c_{6,k+1}} = \frac{1}{2+2-0{,}268} = 0{,}268.$$

$$b_{7,k+1} = c_{6,k+1} \cdot b_{6,k+1} + p \cdot t_{7,k} = 0{,}268 \cdot 136{,}807 + 2 \cdot 50 = 136{,}664.$$

$$c_{8,k+1} = \frac{1}{2+p-c_{7,k+1}} = \frac{1}{2+2-0{,}268} = 0{,}268.$$

$$b_{8,k+1} = c_{7,k+1} \cdot b_{7,k+1} + p \cdot t_{8,k} = 0{,}268 \cdot 136{,}664 + 2 \cdot 50 = 136{,}626.$$

$$c_{9,k+1} = \frac{1}{2 + p - c_{8,k+1}} = \frac{1}{2 + 2 - 0{,}268} = 0{,}268.$$

$$b_{9,k+1} = c_{8,k+1} \cdot b_{8,k+1} + p \cdot t_{9,k} = 0{,}268 \cdot 136{,}626 + 2 \cdot 50 = 136{,}616.$$

Теперь по формуле (9) определим температуры для следующего момента времени (через шаг $\Delta\tau$), начиная расчет от правого внутреннего узла

$$t_{9,k+1} = c_{9,k+1}\left(b_{9,k+1} + t_{w2}\right) = 0{,}268(136{,}616 + 200) = 90{,}2\ ,\ ^{o}C.$$

$$t_{8,k+1} = c_{8,k+1}\left(b_{8,k+1} + t_{9,k+1}\right) = 0{,}268(136{,}626 + 90{,}2) = 60{,}8\ ,\ ^{o}C.$$

$$t_{7,k+1} = c_{7,k+1}\left(b_{7,k+1} + t_{8,k+1}\right) = 0{,}268(136{,}664 + 60{,}8) = 52{,}92\ ,\ ^{o}C.$$

$$t_{6,k+1} = c_{6,k+1}\left(b_{6,k+1} + t_{7,k+1}\right) = 0{,}268(136{,}807 + 52{,}92) = 50{,}85\ ,\ ^{o}C.$$

$$t_{5,k+1} = c_{5,k+1}\left(b_{5,k+1} + t_{6,k+1}\right) = 0{,}268(137{,}338 + 50{,}85) = 50{,}43\ ,\ ^{o}C.$$

$$t_{4,k+1} = c_{4,k+1}\left(b_{4,k+1} + t_{5,k+1}\right) = 0{,}268(139{,}3223 + 50{,}43) = 50{,}85\ ,\ ^{o}C.$$

$$t_{3,k+1} = c_{3,k+1}\left(b_{3,k+1} + t_{4,k+1}\right) = 0{,}268(146{,}725 + 50{,}85) = 52{,}95\ ,\ ^{o}C.$$

$$t_{2,k+1} = c_{2,k+1}\left(b_{2,k+1} + t_{3,k+1}\right) = 0{,}267(175 + 52{,}95) = 60{,}86\ ,\ ^{o}C.$$

$$t_{1,k+1} = c_{1,k+1}\left(b_{1,k+1} + t_{2,k+1}\right) = 0{,}25(300 + 60{,}86) = 90{,}2\ ,\ ^{o}C.$$

4. Расчет температурного поля для одного шага по времени с помощью онлайн-калькулятора в сети Интернет

Для того чтобы воспользоваться онлайн-калькулятором в сети Интернет, необходимо записать девять уравнений вида (8) для всех внутренних узлов.

$$\frac{t_{i,k+1} - t_{i,k}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{i+1,k+1} - 2t_{i,k+1} + t_{i-1,k+1}}{\Delta x^2}\right).$$

Тогда для первого внутреннего узла (i=1) это уравнение примет вид

$$\frac{t_{1,k+1} - t_{1,k}}{\Delta\tau} = a\left(\frac{t_{2,k+1} - 2t_{1,k+1} + t_{0,k+1}}{\Delta x^2}\right).$$

Зная, что $t_{1,k} = t_0 = 50\ ^{o}C;\ t_{0,k+1} = t_{w1} = 200\ ^{o}C;\ \Delta\tau = 1125\ сек;\ a = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\ \frac{м^2}{сек};$ $\Delta x = 0{,}015\ м$, то после преобразований получим

$$t_{1,k+1} - t_{1,k} = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}\left(t_{2,k+1} - 2t_{1,k+1} + t_{0,k+1}\right);$$

$$t_{1,k+1} - 50 = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 1125}{0{,}015^2}\left(t_{2,k+1} - 2t_{1,k+1} + 200\right);$$

$$t_{1,k+1} - 50 = 0{,}5 \cdot \left(t_{2,k+1} - 2t_{1,k+1} + 200\right);$$

$$t_{1,k+1} - 50 = 0{,}5t_{2,k+1} - t_{1,k+1} + 100;$$

$$2t_{1,k+1} - 0{,}5t_{2,k+1} = 150.$$

Проводя аналогичные преобразования для всех последующих узлов, получим систему из 9 алгебраических линейных уравнений

$$-0{,}5t_{1,k+1} + 2t_{2,k+1} - 0{,}5t_{3,k+1} = 50;$$

$$-0{,}5t_{2,k+1} + 2t_{3,k+1} - 0{,}5t_{4,k+1} = 50;$$

$$-0{,}5t_{3,k+1} + 2t_{4,k+1} - 0{,}5t_{5,k+1} = 50;$$

$$-0{,}5t_{4k+1} + 2t_{5,k+1} - 0{,}5t_{6,k+1} = 50;$$

$$-0{,}5t_{5,k+1} + 2t_{6,k+1} - 0{,}5t_{7,k+1} = 50;$$

$$-0{,}5t_{6,k+1} + 2t_{7,k+1} - 0{,}5t_{8,k+1} = 50;$$

$$-0{,}5t_{7,k+1} + 2t_{8,k+1} - 0{,}5t_{9,k+1} = 50;$$

$$-0{,}5t_{8,k+1} + 2t_{9,k+1} = 150.$$

Воспользуемся онлайн-калькулятором (http://matrixcalc.org/slu.html), внесем туда свою систему коэффициентов

$$\begin{cases} 2x_1 - 0{,}5x_2 = 150 \\ -0{,}5x_1 + 2x_2 - 0{,}5x_3 = 50 \\ -0{,}5x_2 + 2x_3 - 0{,}5x_4 = 50 \\ -0{,}5x_3 + 2x_4 - 0{,}5x_5 = 50 \\ -0{,}5x_4 + 2x_5 - 0{,}5x_6 = 50 \\ -0{,}5x_5 + 2x_6 - 0{,}5x_7 = 50 \\ -0{,}5x_6 + 2x_7 - 0{,}5x_8 = 50 \\ -0{,}5x_7 + 2x_8 - 0{,}5x_9 = 50 \\ -0{,}5x_8 + 2x_9 = 150 \end{cases}$$

Ответ:

- $x_1 = 90.19$
- $x_2 = 60.77$
- $x_3 = 52.90$
- $x_4 = 50.83$
- $x_5 = 50.41$
- $x_6 = 50.83$
- $x_7 = 52.90$
- $x_8 = 60.77$
- $x_9 = 90.19$

Сравнивая результаты расчетов, приходим к выводу, что значения температур в узлах совпали.

Далее нужно ответить на контрольные вопросы – тест согласно своего варианта.